Corrigé Tournoi 2023 collège

À la queue leu leu

Cinq personnes nommées A, B, C, D et E (pas nécessairement dans cet ordre) font individuellement la queue pour entrer dans un cinéma. Il y a 3 personnes entre A et B, 5 entre B et C, 7 entre C et D, 9 entre D et E.

Combien y a-t-il de personnes entre A et E au maximum ?

Pour que A et E soient éloignées au maximum il faut placer A, B, C, D et E dans cet ordre. Le nombre de personnes entre A et E est alors égal à (3 + 5 + 7 + 9) + 3 (en comptant B, C et D), donc 27 au total.

Combien y a-t-il de personnes entre A et E au minimum ?

On remarque d'abord que si l'on inverse le sens de la file cela ne change pas le nombre de personnes entre deux des 5 personnes. Il y a deux cas à considérer pour placer C, D et E :

Premier cas, D est entre C et E. Pour rapprocher A et E au maximum les conditions imposées donnent :

C						B		D		A								E

A et E sont alors séparées par 7 personnes.

Deuxième cas, C est entre D et E. Il y a alors deux possibilités pour placer B :

- B est entre D et C, pour rapprocher A de E on obtient :

D		B				A		C		E

A et E sont alors séparées par 3 personnes.

- B est à droite de C, On ne peut pas placer A sur E donc on obtient :

D								C		E				B				A

A et E sont alors séparées par 7 personnes.

Conclusion : le minimum de personnes entre A est E est égal à 3.

Bon compte

Avec les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, chacun utilisé zéro ou une fois, on peut obtenir différents nombres en utilisant des additions, des soustractions, des multiplications et en s'aidant de parenthèses. On peut écrire par exemple $1000 = 2 \times 5 \times (8 \times 9 + 4 \times 7)$ *mais on ne peut pas écrire* $1000 = 2 \times 5 \times (87 + 13)$.

1. Donnez une façon d'obtenir 2023.

Une méthode consiste à factoriser $2023 = 7 \times 289 = 7 \times 17 \times 17$.
On peut alors écrire $17 = 8 + 9 = 2 + 4 + 5 + 6$ pour obtenir finalement :
$2023 = 7 \times (8 + 9) \times (6 + 5 + 4 + 2)$.

2. Donnez une façon d'obtenir 2023 en utilisant tous les nombres de 1 à 9.

En reprenant le calcul précédent on obtient : $2023 = 7 \times (8 + 9) \times (6 + 5 + 4 + 3 - 2 + 1)$

3. Donnez une façon d'obtenir 2023 en utilisant le moins possible de nombres de 1 à 9, et expliquez pourquoi on ne peut pas faire mieux.

En reprenant $2023 = 7 \times 289$ on peut remarquer que $289 = 1 + 288 = 1 + 4 \times 72 = 1 + 4 \times 8 \times 9$ pour obtenir une façon avec <u>5 nombres</u> : $2023 = 7 \times (1 + 4 \times 8 \times 9)$.

On ne peut pas obtenir 2023 en n'utilisant que 4 nombres.
Si on écrit 2023 comme un produit, la factorisation précédente montre que ce n'est pas possible avec seulement 4 nombres. Si on utilise une addition, ce n'est pas possible non plus puisqu'un produit de 3 nombres est au maximum égal à $9 \times 8 \times 7 = 504$ et on ne peut pas atteindre 2023.

4. Donnez une façon d'obtenir 2023 sans utiliser :
- ni le 1 ni le 3

$2023 = 7 \times (8 + 9) \times (6 + 5 + 4 + 2)$.

- ni le 4 ni le 6

$2023 = 1 \times 7 \times (8 + 9) \times (3 \times 5 + 2)$.

- ni le 7 ni le 9.

$2023 = (5 + 2) \times (1 + 4 \times 8 \times (6 + 3))$.

Nombreuses grilles

Une grille de Sudoku 4x4 est une grille de 16 carrés partagée en 4 carrés 2x2.

On la remplit avec les chiffres 1, 2, 3 et 4.

Dans une grille de Sudoku classique, chaque ligne, chaque colonne et chaque carré 2x2 contient une et une seule fois chacun des chiffres 1, 2, 3 et 4.

Une grille de Sudoku X respecte la règle précédente avec une condition supplémentaire : chacune des deux diagonales contient une et une seule fois chacun des chiffres 1, 2, 3 et 4.

1. Complétez ces deux grilles sur votre copie :

Sudoku classique

4	1	2	3
3	2	**1**	4
2	**3**	4	1
1	4	3	**2**

Sudoku X

3	4	1	**2**
2	**1**	4	3
4	3	2	1
1	2	**3**	4

Pour le Sudoku classique on commence par placer le 4 en seconde ligne puis le 3 et le 1 en dernière colonne, puis le 2, le 3 et le 4 en troisième colonne, puis on termine le premier carré 2x2, puis celui du bas.

Pour le Sudoku X on commence par remplir les diagonales et on termine sans difficultés.

2. Complétez toutes les grilles de Sudoku X dans lesquelles la première ligne est 1 2 3 4.

Il y a deux possibilités pour compléter le premier carré 2x2

1	2	3	4
3	4		

1	2	3	4
4	3		

En complétant par exemple les diagonales on obtient sans difficultés les deux grilles possibles :

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

3. Complétez toutes les grilles de Sudoku classique dans lesquelles la première ligne est 1 2 3 4.

Comme dans le cas du Sudoku X il y a deux possibilités pour compléter le premier carré 2x2 et il y a aussi deux possibilités pour compléter le deuxième carré 2x2 : au total quatre cas à considérer.

- Premier cas :

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

On a d'abord complété la première colonne par 2 et 4 et la seconde par 1 et 3 (première grille) ou 3 et 1 (seconde grille). On termine la grille sans difficultés.
Il y a deux autres grilles obtenues en permutant les lignes 3 et 4.

- Deuxième cas :

1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	3	1	2

1	2	3	4
3	4	2	1
2	3		
4	1		

On a d'abord complété la première colonne par 2 et 4 et la seconde par 1 et 3 (première grille) ou 3 et 1 (seconde grille). On termine la première grille sans difficultés mais c'est impossible pour la seconde.
Il y a une autre grille obtenue en permutant les lignes 3 et 4.

- Troisième cas :

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

1	2	3	4
4	3	2	1
2	4	1	3
3	1	4	2

On a d'abord complété la première colonne par 2 et 3 et la seconde par 1 et 4 (première grille) ou 4 et 1 (seconde grille). On termine la grille sans difficultés.
Il y a deux autres grilles obtenues en permutant les lignes 3 et 4.

- Quatrième cas :

1	2	3	4
4	3	1	2
2	1	4	3
3	4	2	1

1	2	3	4
4	3	1	2
2	4		
3	1		

On a d'abord complété la première colonne par 2 et 3 et la seconde par 1 et 4 (première grille) ou 4 et 1 (seconde grille). On termine la première grille sans difficultés mais c'est impossible pour la seconde.
Il y a une autre grille obtenue en permutant les lignes 3 et 4.

4. Combien existe-t-il de grilles de Sudoku X utilisant les chiffres 1, 2, 3 et 4 ?

Il y a $4 \times 3 \times 2 = 24$ possibilités pour remplir la première ligne : choix du premier nombre, puis du second différent du premier, puis du troisième différent des deux premiers, il n'y a plus de choix pour le quatrième.

Au total cela fait $\underline{24 \times 2 = 48}$ grilles de Sudoku X.

5. Combien existe-t-il de grilles de Sudoku classique utilisant les chiffres 1, 2, 3 et 4 ?

Il y a 24 possibilités pour remplir la première ligne donc au total $\underline{24 \times 12 = 288}$ grilles de Sudoku.

Retour de 2023

Dans les deux premières questions une étape consiste à ajouter 1 ou bien à multiplier par 3.

1. Allez de 1 à 23 avec le moins possible d'étapes.

$$23 = 1 + 1 + 3 \times (1 + 3 \times (1 + 1))$$

En partant de 1 on fait 4 fois l'étape « ajouter 1 » et 2 fois l'étape « multiplier par 3 » donc 6 étapes au total. On peut aussi dire qu'il y a 4 signes « + » et 2 signes « × » dans l'égalité.

2. Allez de 1 à 2023 avec le moins possible d'étapes (indication : commencez par la fin).

$$2023 = 1 + 3 \times 674$$

$$674 = (1 + 1 + 3 \times 224)$$

$$224 = (1 + 1 + 3 \times 74)$$

$$74 = (1 + 1 + 3 \times 3 \times 8)$$

$$8 = (1 + 1 + 3 \times (1 + 1))$$

Il y a 10 signes « + » et 6 signes « × » <u>donc 16 étapes</u>.

3. Dans cette question une étape consiste à ajouter 1 ou bien à multiplier par N, nombre entier fixé. Trouvez une valeur de N, entier compris entre 4 et 10 au sens large, pour laquelle le nombre d'étapes pour aller de 1 à 2023 est inférieur à 10.

Pour N = 10 on obtient :

$$2023 = 1 + 1 + 1 + 10 \times (1 + 1 + 10 \times 10 \times (1 + 1))$$

Il y a 6 signes « + » et 3 signes « × » <u>donc 9 étapes pour N = 10.</u>

Pour N = 9 il y a 22 signes « + » et 3 signes « × » donc 25 étapes.

Pour N = 8 il y a 20 signes « + » et 3 signes « × » donc 23 étapes.

Pour N = 7 il y a 12 signes « + » et 3 signes « × » donc 15 étapes.

Pour N = 6 il y a 7 signes « + » et 4 signes « × » donc 11 étapes.

Pour N = 5 il y a 10 signes « + » et 4 signes « × » donc 14 étapes.

Pour N = 4 il y a 12 signes « + » et 5 signes « × » donc 17 étapes.