Thème : Mathématiques à la CARTE !

Le DÉFI est d'aider une jeune équipe de restaurateurs à ouvrir leur Auberge !

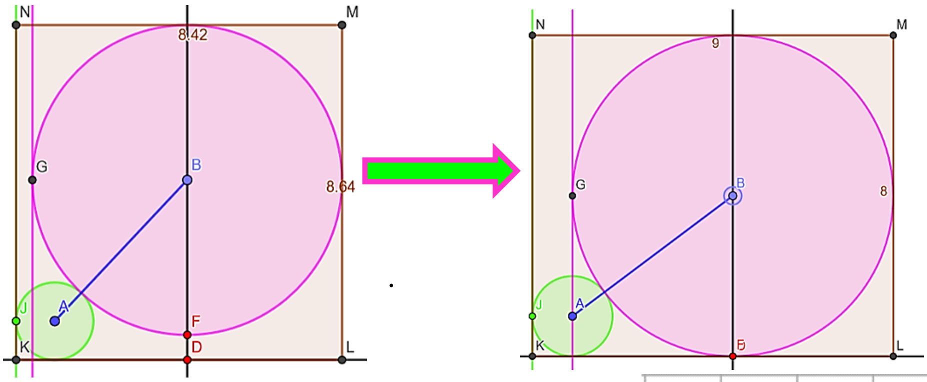
Éléments de CORRECTION

1. A La carte : le Menu BULLE

a) Construisons un menu MODELE avec r = 1 cm et R = 4 cm

Sur le fichier géogebra, les curseurs sont déjà réglés : r sur 1 et le curseur R sur 4

Il suffit de déplacer le point B afin de faire coïncider le point F avec le point D : Cela amène le grand cercle à être tangent au rectangle



On trouve que le rectangle tangent aux 2 cercles a pour dimensions :

largeur $\ell = 8$

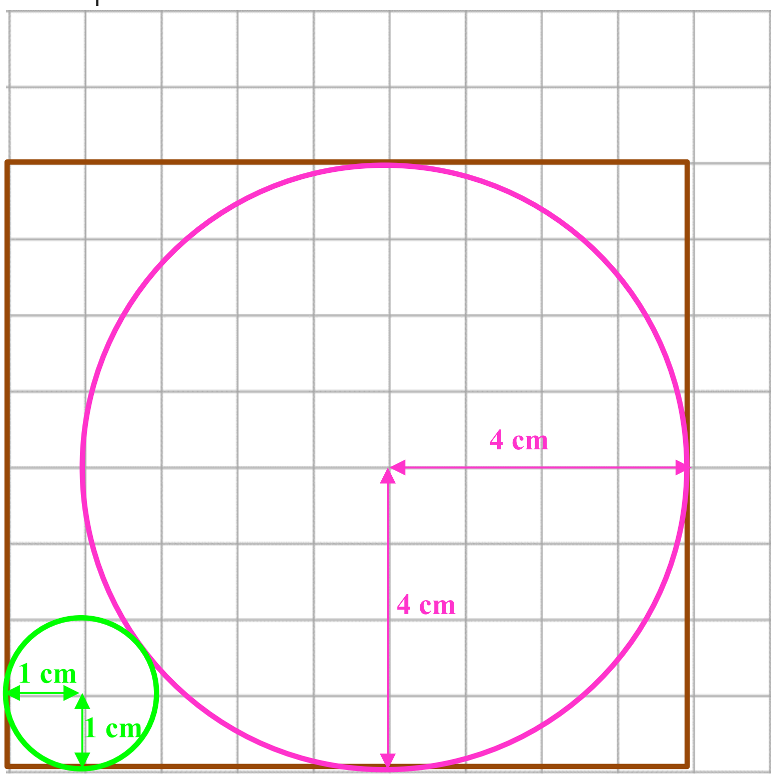
longueur L = 9

On construit cette figure en s'aidant du quadrillage :

On trace le rectangle 9 cm par 8 cm

Puis le petit cercle de rayon 1cm en plaçant son centre à 1cm du coté gauche et du coté bas du rectangle

On place le centre du 2nd cercle à 4 cm du côté droit et du côté bas du rectangle



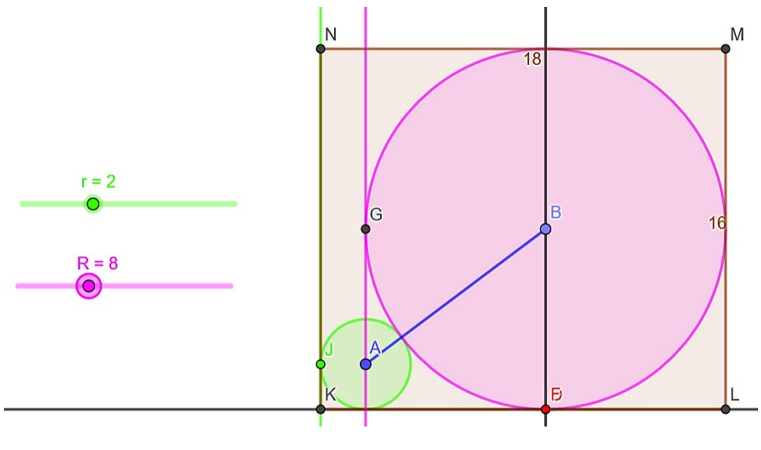
b) Recherchons les dimensions entières du Menu BULLE

Procédure par essais : on augmente de 1 en 1 les curseurs r et R et à chaque double position, on rend le grand cercle tangent au rectangle. On regarde si les dimensions du rectangle obtenu sont entières.

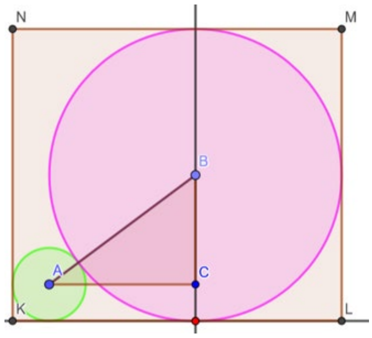
La solution s'obtient avec les curseurs réglés :

r sur 1 et le curseur R sur 4

Le rectangle mesure 16 cm de largeur et 18 cm de longueur



c) Retrouvez ces dimensions entières du rectangle Menu par le calcul



Avec les notations de la figure jointe, on trouve que ABC est un triangle rectangle en B avec $AB = R + r$ et $CB = R - r$

d'où par le théorème de Pythagore :

$AB^2 = AC^2 + CB^2$ soit $(R + r)^2 = AC^2 + (R - r)^2$ et en isolant $AC^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = [(R + r) + (R - r)] \times [(R + r) - (R - r)] = [2R] \times [2r] = 4Rr$ d'où $AC = 2\sqrt{Rr}$

La longueur du rectangle est donc égale à $L = r + 2\sqrt{Rr} + R$ et sa largeur à $\ell = 2R$.

Nous recherchons des dimensions entière du rectangle donc il faut que la partie $\sqrt{Rr}$ constituant la longueur soit entière :

Examinons les premiers « carrés parfaits » : **4, 9, 16, 25,** ils doivent correspondre à $R \times r$

$4 = 4 \times 1 = 2 \times 2$ → cette situation correspond déjà avec $R = 4$ et $r = 1$ au **menu Modèle** du **a)**

$9 = 3 \times 3$ → situation avec 2 cercles identiques $R = r = 3$. ***Cela ne correspond pas au menu recherché***

$16 = 4 \times 4 = 8 \times 2$

→ <u>le 1er produit</u> avec 2 cercles identiques $R = r = 4$ ***Cela ne correspond pas au menu recherché***

→ <u>le second produit</u> 8×2 correspond à $R = 8$ et $r = 2$

On en déduit $L = 2 + 2\sqrt{8 \times 2} + 8 = 2 + 2 \times 4 + 8 = 18$ cm et $\ell = 2 \times 8 = 16$ cm

$25 = 5 \times 5$ → situation avec 2 cercles identiques $R = r = 5$. ***Cela ne correspond pas au menu recherché***

Une demi-feuille mesure 21 cm × 14,8 cm et le rectangle MENU avec des dimensions entières les plus proches de la demi feuille est celui de <u>longueur 18 cm et de largeur 16 cm</u>

2 Les bons COUVERTS

Un couvert est composé par personne d'une fourchette, un couteau et d'une petite cuillère. Ainsi en comparant les quantités de chacun, on voit bien que le nombre de couverts est limité par le nombre le plus petit : soit 85 couteaux < 93 fourchettes < 100 petites cuillères.

On aura au maximum possible de <u>85 couverts</u>

On regarde ensuite le nombre d'assiettes, on dispose de 7 piles de 24 assiettes soit $7 \times 24 = 168$.

Comme on doit prévoir 2 assiettes par convive, on peut fournir les assiettes jusqu'à $168 / 2 =$ <u>84 convives</u>

On regarde enfin les verres, Il y en a 25 boites de 10 verres soit $25 \times 10 = 250$. Comme on doit prévoir 2 assiettes par convive, on peut fournir les verres jusqu'à $250 / 3 = 83,333$… soit <u>83 convives</u>

On retient le nombre de convives possible le plus petit , ici il s'agit des verres qui ne permettent que 83 convives.

3. Le petit JEU de l'année 2023

a) Donnez une façon d'obtenir 2023

Une méthode consiste à factoriser $2023 = 7 \times 289 = 7 \times 17 \times 17$.

On peut alors écrire $17 = 8 + 9 = 2 + 4 + 5 + 6$ pour obtenir finalement: $\mathbf{2023 = 7 \times (8+9) \times (6+5+4+2)}$

b) Donnez une façon d'obtenir 2023 en utilisant chacun des nombres de 1 à 9

En reprenant le calcul précédent on obtient : $\mathbf{2023 = 7 \times (8 + 9) \times (6 + 5 + 4 + 3 - 2 + 1)}$

4. Le SUDOKU X

Pour le Sudoku X, on commence par remplir les diagonales et on termine sans difficultés.

Sudoku X

3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1
1	2	3	4

5. Le SUDOKU X, combien de grilles ?

a) Compléter les 2 grilles correctes de SUDOKU X

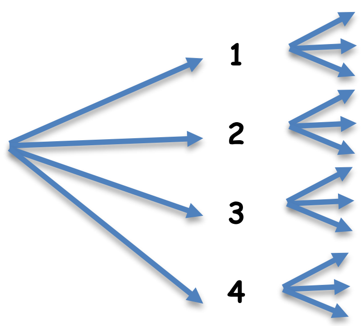
1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

1	2	4	3
3	4	2	1
2	1	3	4
4	3	1	2

b) Trouver combien de *Carré 2 ×2 comme* ①, existe –t-il ?

On recherche le nombre de possibilités de remplir les 4 cases du **carré rouge** par les chiffres 1 ; 2 ; 3 et 4

1ère case 2nde case 3ème case 4ème case



4 possibilité × 3 possibilité × 2 possibilité × 1 possibilité = *24 possibilités de remplir le carré rouge*

c) Combien de grilles SUDOKU X différentes peut-on créer ?

Une fois que l'on a rempli le carré rouge, il n'y a que **2 possibilités de finir le sudoku X** , selon les translations de la grille de gauche ou selon celles de la grille de droite de l'exemple donné en présentation

Donc nous avons **24 carrés rouges différents possibles** × **2** = ***48 sudoku X différents***

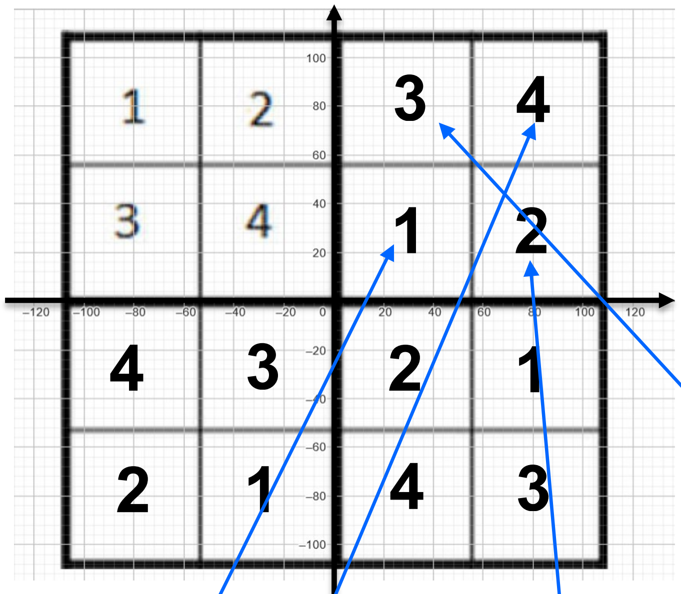
6. Programmons les SUDOKU X

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

Préparation de la programmation

On reconnait l'exemple de <u>la grille de gauche</u> du **5.a)** →

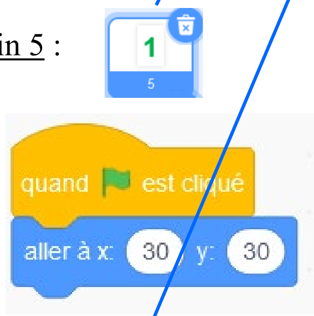
On peut la compléter dans le repère utilisé par le programme :



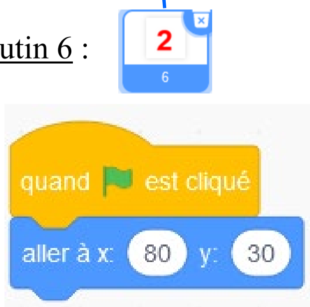
On va programmer le déplacement de <u>chaque lutins du 5ème au 12ème</u> pour qu'ils se placent aux coordonnées correctes du sudoku X, comme vu dans le repère du dessus.

Algorithme sur SCRATCH :

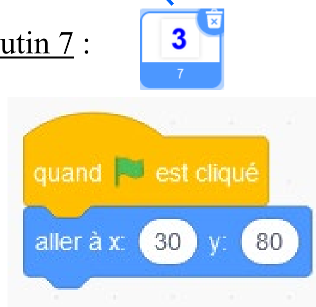
<u>Lutin 5</u> :



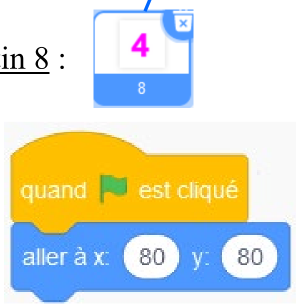
<u>Lutin 6</u> :



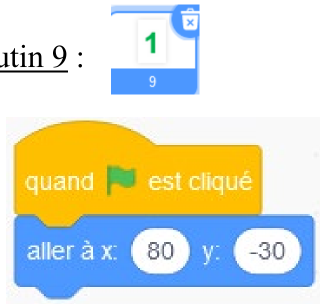
<u>Lutin 7</u> :



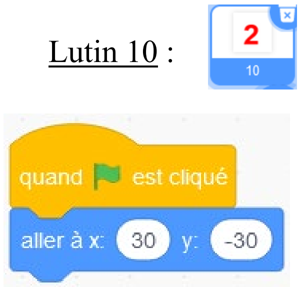
<u>Lutin 8</u> :



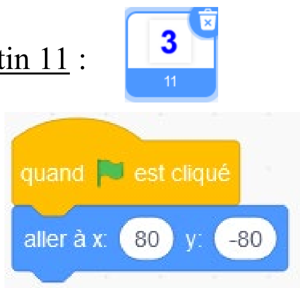
<u>Lutin 9</u> :



<u>Lutin 10</u> :



<u>Lutin 11</u> :



<u>Lutin 12</u> :