Histoires de vecteurs et de produit scalaire pour éclairer leur enseignement

Limoges, le 18 janvier 2024

Anne Boyé, IREM des Pays de la Loire,

Centre François Viète d'épistémologie, histoire des sciences et des techniques

Pourquoi, quand, « ont-ils inventé » les vecteurs ?

Le produit scalaire qu'est-ce que çà calcule au juste ?

- Les vecteurs pourquoi ?
- Quelles sont les problématiques initiales auxquelles répond la construction du concept ?
- Quelles sont les problématiques actuelles qui peuvent donner sens à notre enseignement (pas forcément historiques) ?
- Quels vecteurs ?
- Le produit scalaire, pourquoi, comment ?

Ouverture interdisciplinaire

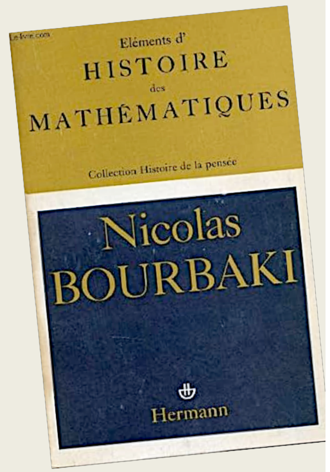
Maths, physique, ….

Une occasion de comprendre comment et pourquoi naît un objet mathématique, quelles en sont les idées originelles.

- *« Implicitement la mécanique était porteuse, depuis Galilée, du concept de vecteur ; il restait à l'expliciter, un exemple de plus d'une notion mathématique directement dérivée de la réalité concrète. »*

Jean Rosmorduc, *Bulletin de l'Union des physiciens, novembre 1975.*

« La composition des forces et la composition des vitesses, bien connues en mécanique dès la fin du 17° siècle, n'exercèrent aucune répercussion sur l'Algèbre, bien qu'elles renfermassent déjà en germe le calcul vectoriel. Il faut attendre en effet le mouvement d'idée qui, aux environs de 1800, conduit à la représentation géométrique des nombres complexes, pour voir utiliser en mathématiques pures l'addition des vecteurs. Cette opération est d'ailleurs introduite sans aucune référence à la mécanique ; le lien entre les deux théories n'est explicitement reconnu que par les fondateurs du calcul vectoriel, dans le deuxième tiers du 19° siècle. »



Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*,1974

-

Les mots

Vecteur ?

William Rowan Hamilton (1805-1865), donnera le nom de « vector », traduit en français par « vecteur », à une partie d'un quaternion, la partie imaginaire.. Le terme « vecteur » ou « vector » est probablement issu de son usage en astronomie sous la forme « rayon vecteur », que nous trouvons dès le XVII^{e} siècle. Une majorité des scientifiques, dont Hamilton, s'intéressaient de façon plus ou moins prégnante à cette science.

(un quaternion s'écrit sous la forme $a + bi + cj + dk$, *où* a, b, c, d sont des nombres réels, et i, j, k des imaginaires, comme dans un nombre complexe $a + bi$, a et b sont réels, et i un imaginaire. Il y a donc aussi la partie réelle et la partie imaginaire d'un quaternion.*)*

Scalaire ?

Le mot **« scalaire »,** provient du mot anglais « scalar », qui dérive lui-même du mot latin « scala », échelle. Le mot scalar apparaît pour la première fois en 1844 sous la plume de Hamilton,dans son article *On q uaternions*, puis en 1846, dans le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, pour désigner la partie réelle d'un quaternion.

« (…) ***then we give the name of scalars to all numbers of the kind called usually real, because they are all contained on the one scale of progression of number from negative to positive infinity*** **(…) »**

W. R. Hamilton, 1846

Invention de la « droite des réels ». Les réels tels 3 ou 203,4 ou -5 seront représentés par un point d'une droite (orientée), ce ne sont plus des segments vers la droite pour les positifs, vers la gauche pour les négatifs, à partir d'une origine, dont les mesures seraient respectivement par exemple 3, ou 203,4, ou 5 etc. Et ces réels seront des scalaires.

Le mot scalaire n'est pas réservé aux mathématiques. Le hasard de nos recherches nous a menées à des coquillages, les Scalaires précieuses, et des poissons, les poissons scalaires ! Il y a peut-être d'autres objets, plantes ou animaux qui ont ce qualificatif, pour rappeler tout simplement leur lien avec une échelle ou une forme d'escalier.

Produit scalaire ?

Provient de la partie réelle du produit de deux vecteurs de deux quaternions, sur lequel nous reviendrons. C'est **William Kingdon Clifford** (1845-1879) qui le définira sous sa forme actuelle, en 1878, dans *Elements of Dynamic*. *introduction to the study of motion and rest in solids and fluid bodies*

La genèse du concept de vecteur

Il est traditionnel de considérer trois grandes origines pour le concept de vecteur :

(2)La quête d'une « réalité tangible » pour les quantités imaginaires, qui mènera à une représentation géométrique de ces quantités, au début du 19ème siècle, avec la notion de « direction », nous dirions de segments orientés.

(1) Les recherches de G. W. Leibniz sur une possibilité de calculer directement sur les figures et les éléments de géométrie sans passer par des intermédiaires algébriques, étrangers à la géométrie, ainsi que l'on opérait par exemple dans la géométrie de Descartes.

(3) Les idées sur la composition des forces ou des vitesses dans le domaine de la mécanique.

Trois grandes origines pour le concept de vecteur

Leibniz :calculer directement sur les figures et éléments de géométrie sans passer par les intermédiaires algébriques (vs Descartes)

(1)

Donner une réalité « tangible » aux **quantités imaginaires**, avec la notion de direction (nous dirions segments orientés)

(2)

Calcul portant diversement sur les objets géométriques

Les idées sur la composition des forces ou des vitesses, dans le domaine de la mécanique

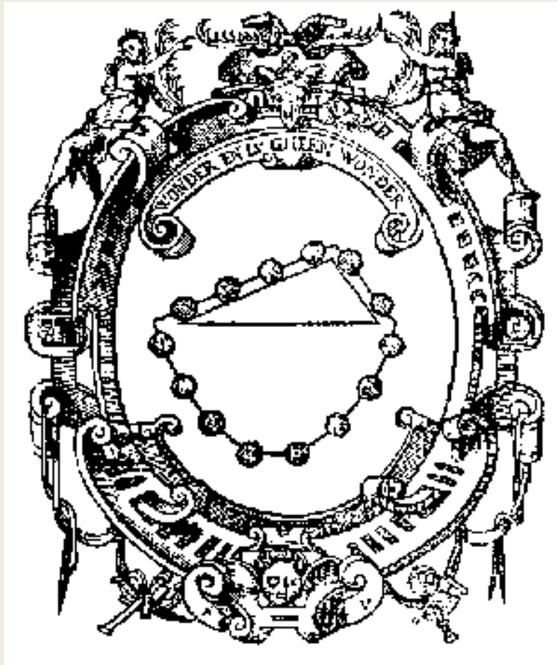
(3)

Signification physique, mécanique, du calcul vectoriel. Le vecteur étant une façon de représenter des concepts mécaniques, les forces et les vitesses.

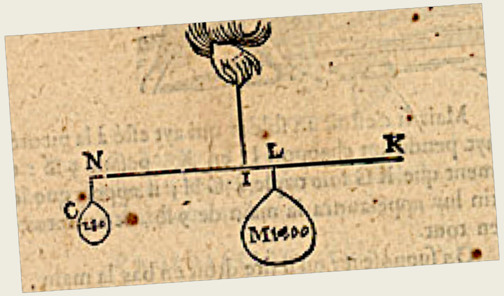
La composition des « forces »

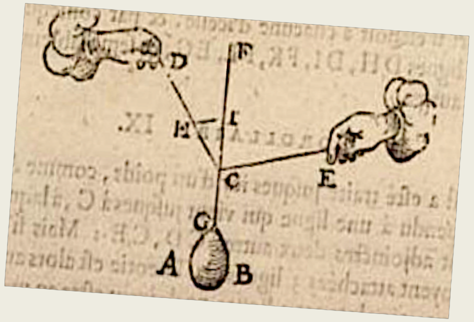
Simon Stevin (1548-1620). *L'art pondéraire, ou de la statique*

« le triangle des « pesanteurs », « forces ? »



Merveille n'est pas mystère





images de La Statique 1634 (édition française)

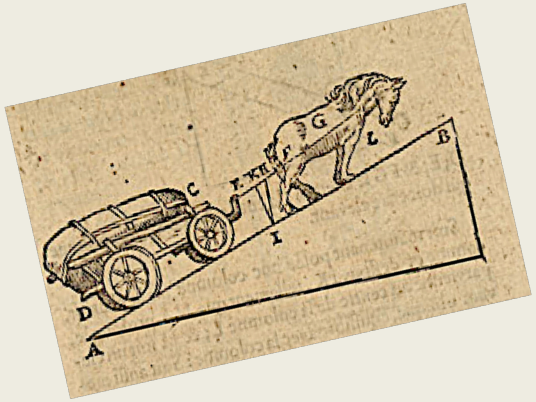
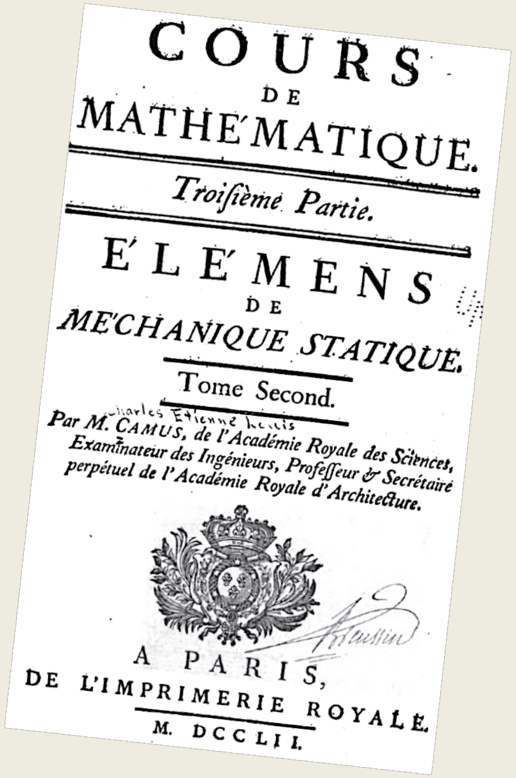


Image dans la première partie de l'adjonction de la Statique traitant de la Spartostatique ou de l'Art pondéraire par cordages

Triangle des « forces »? Règle du parallélogramme ?

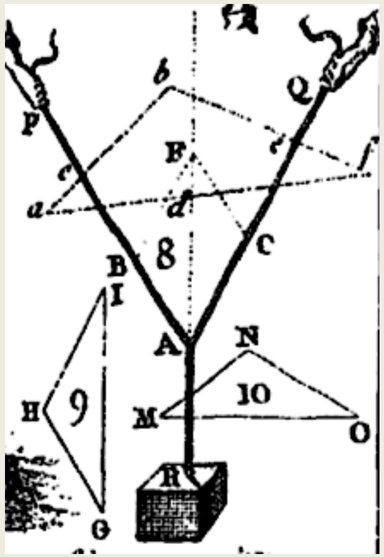
Charles Louis Camus (1699-1768).


COURS
DE
MATHÉMATIQUE.
Troisième Partie.
ÉLÉMENS
DE
MÉCHANIQUE STATIQUE.
Tome Second.
Par M. CAMUS, de l'Académie Royale des Sciences, Examinateur des Ingénieurs, Professeur & Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale d'Architecture.
A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
M. DCCLII.

1752

« Trois puissances P, Q et R sont appliquées à trois cordons AP, AQ, AR assemblés par un nœud A, étant en équilibre ; trouver en quels rapports sont ces trois puissances, lorsque les directions de leurs cordons sont données. »

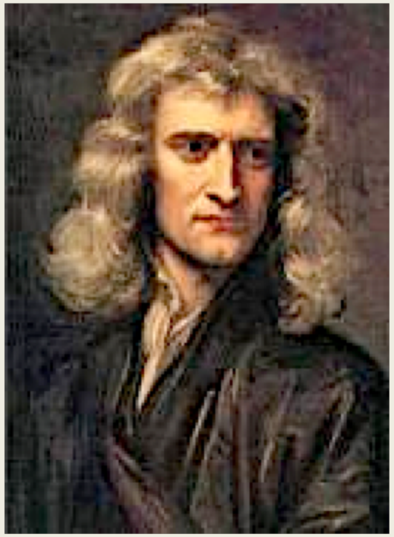
Qui va se réduire « *à trouver sur les directions connues des deux puissances P, Q deux parties AB, AC qui puissent exprimer deux forces dont la résultante soit représentée par AF* ».



« Cours de mathématiques à destination des ingénieurs », qui comprend trois parties : « élémens d'arithmétique, élémens de géométrie théorique et pratique, élémens de méchanique statique ».

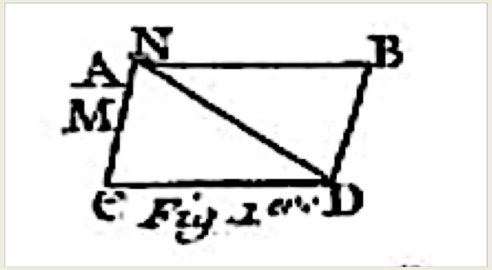
Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687

Traduit par Madame La Marquise du Châtelet, « Principes mathématiques de philosophie naturelle ».



1642-1727

La règle du parallélogramme pour la composition des forces apparaît de façon précise dans le corollaire I, de la première section où sont énoncées les définitions et les lois.

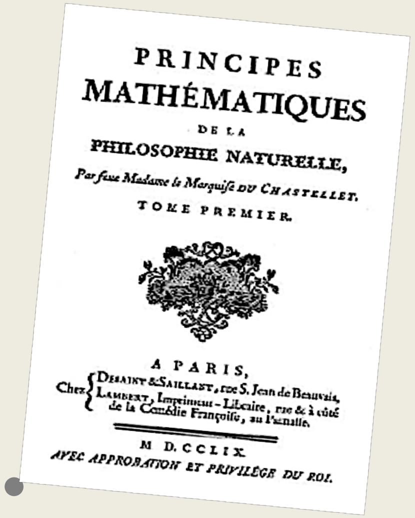


COROLLAIRE I.

Un corps pouſſé par deux forces parcourt, par leurs actions réunies, la Diagonale d'un parallélogramme dans le même temps, dans lequel il auroit parcouru ſes côtés ſéparément.

COROLLAIRE II.

D'où l'on voit qu'une force directe AD eſt compoſée des forces obliques quelconques AB & BD, & réciproquement qu'elle peut toujours ſe réſoudre dans les forces obliques quelconques AB & BD. Cette réſo-lution & cette compoſition des forces ſe trouve confirmée à tout moment dans la méchanique.



PRINCIPES MATHÉMATIQUES DE LA PHILOSOPHIE NATURELLE,

Par feue Madame la Marquiſe du Chastellet.

TOME PREMIER.

A PARIS,

Chez Desaint & Saillant, rue S. Jean de Beauvais, Lambert, Imprimeur-Libraire, rue & à côté de la Comédie Françoiſe, au Parnaſſe.

M. DCCLIX.

AVEC APPROBATION ET PRIVILÈGE DU ROI.

Composition des forces, des vitesses, introduction explicite de la direction et du sens.

Nous sommes habitué·e·s à « voir » des vecteurs dès qu'il y a forces ou compositions de forces. Il ne faut pas s'y méprendre. Ni chez Simon Stevin, ni chez Isaac Newton il n'y a de notion de vecteurs au sens contemporain du terme. Cependant, de façon évidente, les mathématiciens des 18ème et 19ème siècles sont nourris de ces images ; **la mécanique, l'étude des mouvements, l'astronomie**,… influencent en permanence leur questionnement et leurs inventions mathématiques.

Bahlsen-Werbung, um 1900

La géométrie de situation

Leibniz (1646-1716)

Lettre à Huygens du 8 septembre 1679

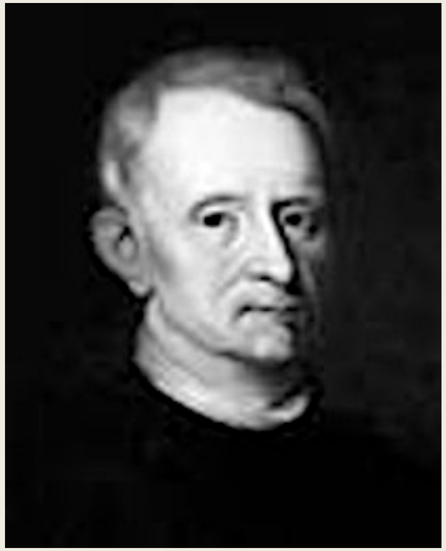
- *Je ne suis pas satisfait de l'algèbre car elle ne fournit ni les méthodes les plus rapides, ni les plus belles constructions géométriques. C'est pourquoi, je crois que, en ce qui concerne tout au moins la géométrie, nous avons besoin d'une analyse différente qui soit essentiellement géométrique ou linéaire et qui soit capable d'exprimer directement les « situs ».Je crois avoir mis au point une telle méthode qui permet de représenter les figures, et même les machines et les mouvements par des signes, de même que l'algèbre représente les nombres et les positions par des signes.*

« J'ai découvert certains éléments d 'une nouvelle théorie, qui est différente de l'algèbre et dont l'un des principaux avantages est de représenter pour l'esprit, d'une façon exacte et réelle, même sans figure, tout ce qui dépend de la perception des sens. »

- Mais Leibniz ne définit aucune opération, et pour lui : AB γ BA. Sa géométrie est donc loin d'un système vectoriel où justement le sens de A vers B va avoir un rôle essentiel.
- Mais il est un des premiers à avoir poser le problème de faire une sorte d'algèbre sur les figures elles-mêmes, indépendantes des nombres.
- La publication de son *Essai sur la géométrie de situation* en 1833 va donner l'occasion à H. Grassmann de faire connaître ses propres travaux.

La représentation géométrique des quantités imaginaires

Caspard Wessel 1799,

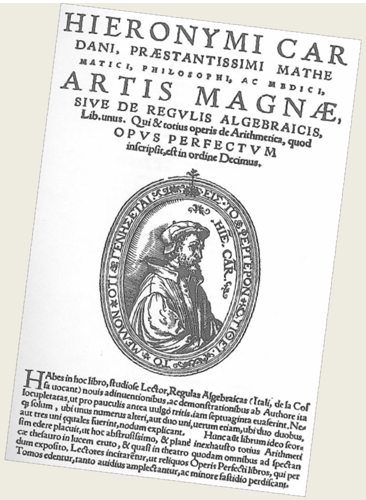


Jean-Robert Argand 1806

John Warren 1828,

C. V. Mourey 1828

…



HIERONYMI CARDANI, PRÆSTANTISSIMI MATHEMATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,

ARTIS MAGNÆ, SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS, Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod OPVS PERFECTVM inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cosa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aût librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarētur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Le problème :

L'ALGEBRA OPERA...

Di Rafael Bombelli da Bologna

... Diuisa in tre Libri.

Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.

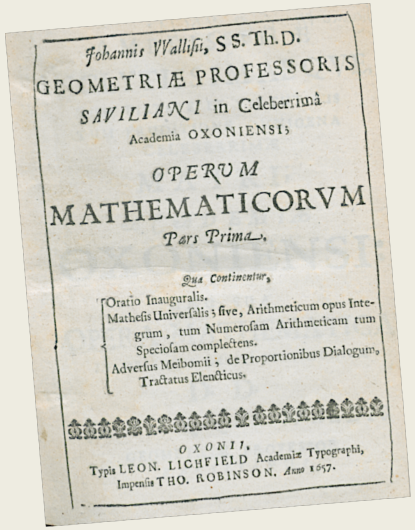
IN BOLOGNA,

Per Giouanni Rossi. MDLXXIX..

Con licenza de' Superiori.

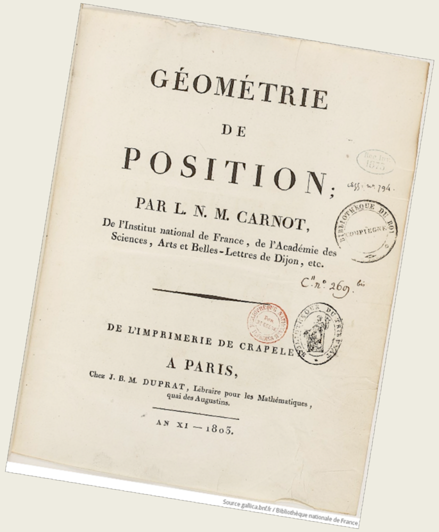
- Depuis Cardan et Bombelli (1545 ; 1572) on utilise les imaginaires sans pouvoir leur donner de sens. Ce ne sont pas des « nombres » puisqu'ils ne peuvent mesurer aucune grandeur matérielle.
- A la fin du 18° siècle et au début du 19° siècle, la question est donc de trouver une représentation géométrique de ces quantités, ce qui est la seule façon, alors, de leur donner une certaine réalité tangible.
- L'idée d'introduire une « direction » en géométrie est fortement présente.

- Les quantités négatives



Johannis Wallisii, S S. Th. D.
GEOMETRIÆ PROFESSORIS
SAVILIANI in Celeberrimâ
Academia OXONIENSI;
OPERUM
MATHEMATICORUM
Pars Prima.
Qua Continentur,
Oratio Inauguralis.
Mathesis Universalis; sive, Arithmeticum opus Integrum, tum Numerosam Arithmeticam tum Speciosam complectens.
Adversus Meibomii; de Proportionibus Dialogum, Tractatus Elencticus.
OXONII,
Typis LEON. LICHFIELD Academiæ Typographi,
Impensis THO. ROBINSON. Anno 1657.

- L'idée de la perpendicularité (Wallis1685)

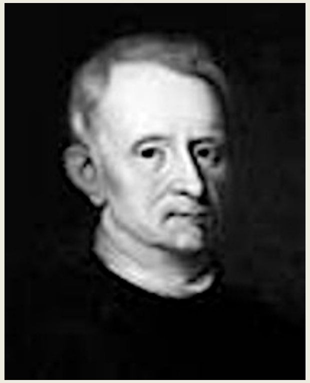


GÉOMÉTRIE
DE
POSITION;
PAR L. N. M. CARNOT,
De l'Institut national de France, de l'Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Dijon, etc.
DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.
A PARIS,
Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins.
AN XI — 1803.

- La géométrie de position de Carnot (1803)

« *Tous les mathématiciens qui pensent et qui sont de bonne foi conviennent que la théorie des quantités négatives est loin d'être satisfaisante. Mais s'il en est ainsi des quantités simplement négatives, que doit-on dire des imaginaires ?* »

Mourey, C. V., *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires*, 1828,



Jean-Robert Argand (1768-1822)

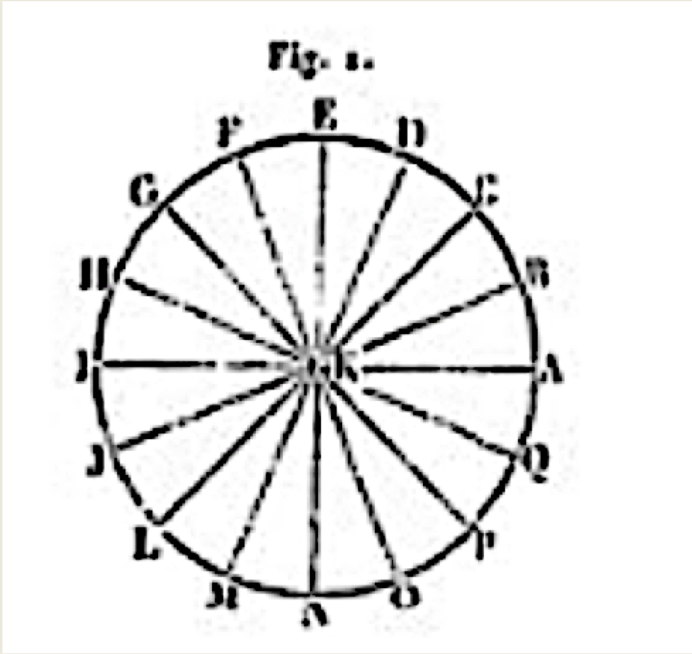
« Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires par des constructions géométriques » 1806

Imaginons que l'on veuille déterminer la moyenne proportionnelle entre +1 et – 1, donc x tel que

$$\frac{+1}{x} = \frac{x}{-1}$$

« On est arrêté ici comme on l'a été en voulant continuer au-delà de 0 une progression arithmétique décroissante, car on ne peut égaler x à aucun nombre positif ou négatif. Mais puisqu'on a trouvé plus haut que la quantité négative, imaginaire lorsque la numération était appliquée à certaines espèces de grandeurs, devenait réelle lorsque l'on combinait d'une certaine manière l'idée de grandeur absolue avec l'idée de direction, ne serait-il pas possible d'obtenir le même succès relativement à la quantité dont il s'agit, quantité réputée imaginaire par l'impossibilité où l'on est de lui assigner une place dans l'échelle des quantités positives ou négatives ? »

« On peut, pour aider les idées à se fixer, considérer un cas particulier, comme, par exemple, si l'on désigne **par $\overline{KA}$ une force déterminée prise pour unité, et dont l'action s'exerce sur tous les points possibles,** parallèlement à KA et dans le sens de K à A, cette unité pourra être exprimée par une ligne parallèle à KA, prise à partir d'un point quelconque. L'unité négative sera une force égale en action, et dont l'effet a lieu parallèlement à la même ligne, mais dans le sens de A à K, et pourra pareillement être exprimée par une ligne partant d'un point quelconque, laquelle sera prise en sens contraire à la précédente. »



K est un point fixe, l'unité positive est la ligne KA, notée $\overline{KA}$, pour indiquer qu'il y a une direction de K vers A, l'unité négative sera $\overline{KI}$, KE, perpendiculaire à KA, représente « géométriquement » la moyenne proportionnelle entre KA et KI, donc $\overline{KE}$ sera une représentation de $\sqrt{-1}$, et la direction opposée $\overline{KN}$ représentera $-\sqrt{-1}$.

De proche en proche on pourra insérer des « moyennes proportionnelles entre les quantités déjà représentées. Il suffit pour cela de diviser les angles en parties égales.

"En conséquence de ces réflexions, on pourra généraliser le sens des expressions de la forme $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{KP}$, ... , et toute expression pareille désignera, par la suite, une ligne d'une certaine longueur, parallèle à une certaine direction, prise dans un sens déterminé entre les deux sens opposés que présente cette direction, et dont l'origine est à un point quelconque, ces lignes pouvant elles-mêmes être l'expression de grandeurs d'une autre espèce.

La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires

C. V. Mourey, 1828

« Avec un nouveau système d'algèbre que je cherchais, j'ai trouvé un nouveau système de géométrie, auquel je ne m'attendais pas. Ce ne sont cependant pas deux sciences ; ce n'est qu'une seule science, une seule théorie, laquelle a deux faces, l'une algébrique, et l'autre géométrique. C'est une algèbre émanée de la géométrie ; c'est une géométrie généralisée et rendue algébrique. »

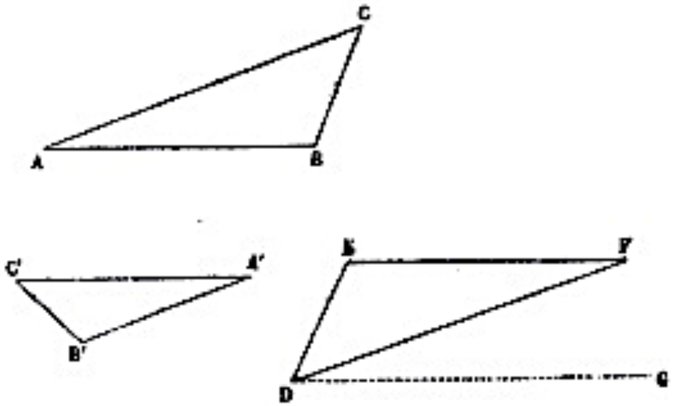
2. Si un voyageur, ou un mobile quelconque, partant du point A, va d'abord au point B (*fig.* 1, 2, 3 et 4),

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.



avancé que s'il fût allé directement de A en C, ni plus ni moins; donc,

voyage de A *en* B + *voyage de* B *en* C *est équivalent à voyage de* A *en* C;

ou, pour abréger,

$$AB + BC = AC.$$

L'idée fondamentale de cette théorie est celle du chemin, considéré comme conduisant en un seul sens. Sur toute ligne on peut concevoir deux chemins conduisant en sens opposés, l'un de A en B, par exemple, et l'autre de B en A. Pour que deux chemins soient égaux, en tant que chemins, il ne suffit pas qu'ils aient même longueur, il faut aussi qu'ils aient même direction. De sorte que tous les rayons d'un même cercle, considérés comme conduisant du centre à la circonférence, sont des chemins inégaux. L'expression algébrique (ou même arithmétique) d'un chemin en déterminera la direction, relativement à un autre chemin pris pour terme de comparaison,

DEVELOPPEMENT

4. Nous appellerons *ligne directive* ou *chemin*, la ligne considérée comme représentant un voyage, c'est-à-dire comme conduisant dans un seul sens. Il est bon de concevoir le chemin comme fluant, et indiquant par son flux le sens dans lequel il conduit.

Pour désigner le chemin qui conduit de A en B, nous dirons simplement AB ; et pour désigner celui qui conduit de B en A, nous dirons BA . Ces deux notations AB , BA indiquent donc deux chemins différents, ou deux lignes directives différentes, quoiqu'elles n'expriment qu'une même ligne non directive.

*Des deux extrémités d'un chemin, l'une est le point de départ, ou l'*origine *; l'autre est le point d'arrivée, ou le* terme. *Dans AB, par exemple, l'origine est A, et le terme est B ; dans BA, au contraire, l'origine est B et le terme est A. La droite et la gauche d'un chemin sont la droite et la gauche du spectateur qui, placé à l'origine, regarde le terme.*

L'équation

$$AB + BC = AC$$

sera notre principe fondamental.

Il ne faut pas s'amuser à discuter sur la rigueur de ce principe ; pour tirer au court, il faut le regarder comme une convention à admettre. On doit admettre cette convention, si elle est utile : or, elle est de la plus grande utilité, puisqu'elle seule peut nous fournir le moyen de suppléer, en Algèbre, à la soustraction.

Donc,

La somme de deux chemins de suite est le chemin simple qui conduit de l'origine du premier au terme du second ; plus simplement, c'est le chemin qui a même origine que le premier, et même terme que le second.

- Ces représentations géométriques mettent en avant l’idée de « lignes dirigées », « chemins », donc de direction, dans le plan. Nous avons en quelque sorte la représentation des « nombres complexes » en module et argument.

(addition, mais surtout multiplication)

- *Il reste une certaine ambiguïté entre lignes dirigées (entité géométrique ?) et nombres dirigés (nombres ?)*
- *L’idée de presque tous ces auteurs est maintenant de trouver un moyen d’étendre leur calcul à l’espace.*

Deux « axes » de recherche, d'une certaine façon

« géométrique »

(Leibniz)(Carnot)

Bellavitis, Moebius, De Saint Venant

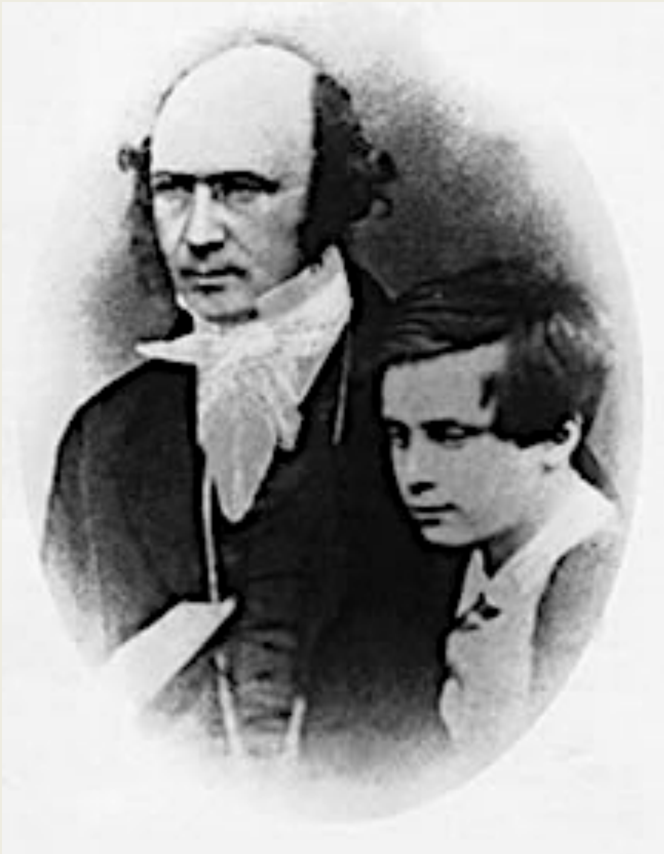
Grassmann

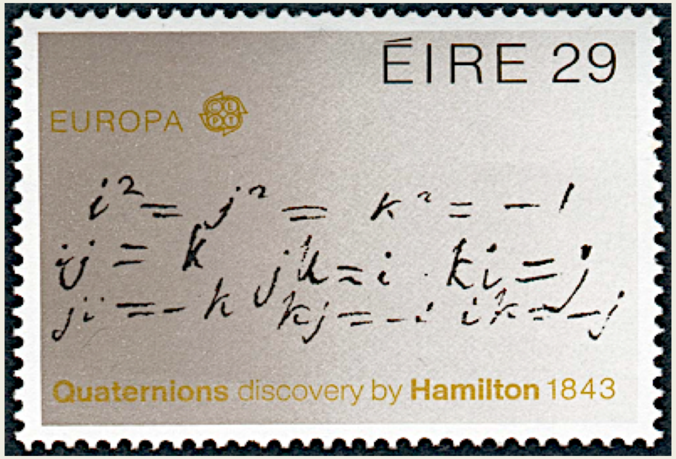
« Algébrique »

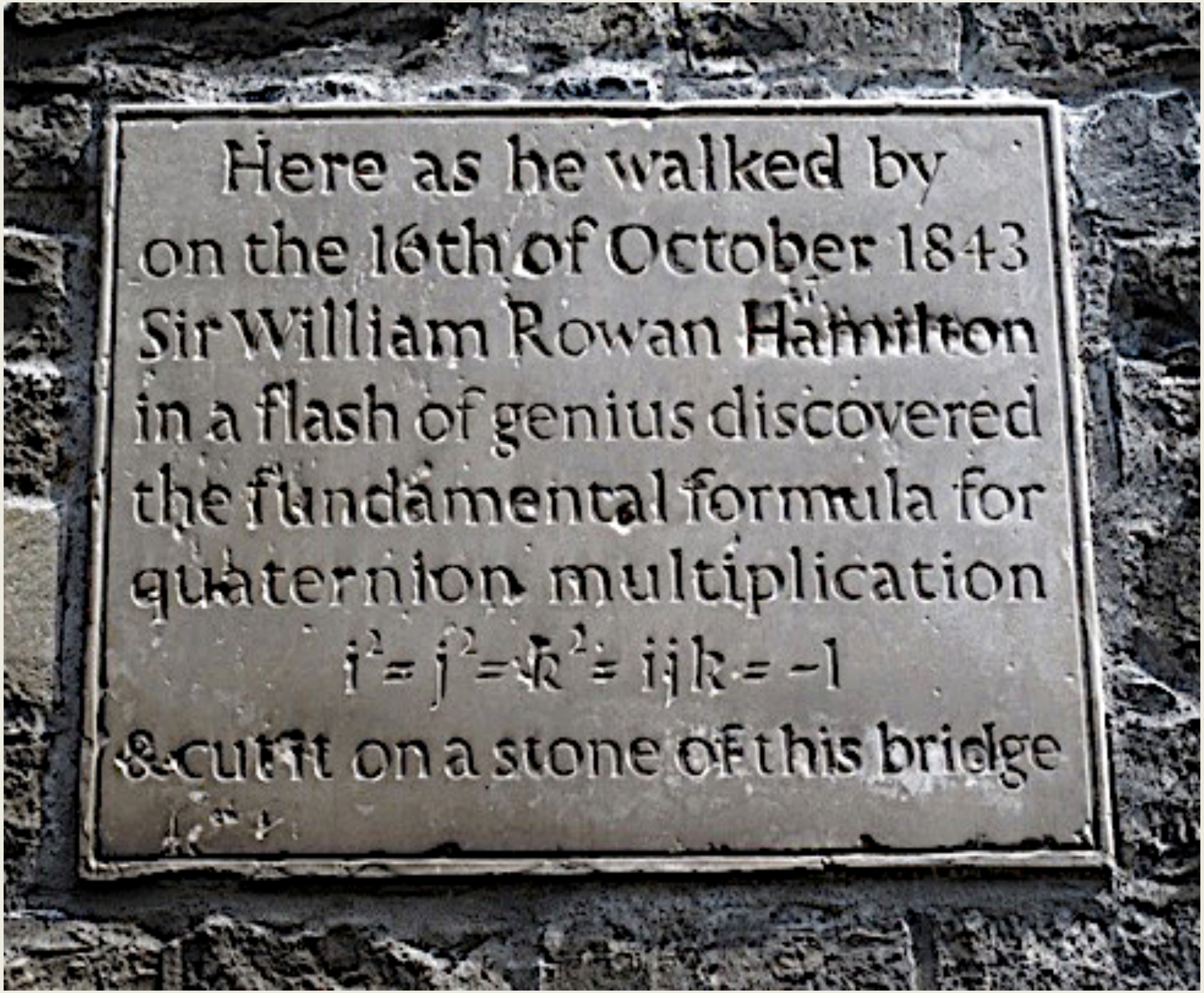
Hamilton

Vecteurs

William Rowan Hamilton (1805-1865)






Here as he walked by
on the 16th of October 1843
Sir William Rowan Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
& cut it on a stone of this bridge

- Théorie des fonctions conjuguées ou des couples algébriques - 1837.
- Trouver une signification interne aux quantités imaginaires, qui ne passe pas par la géométrie.
- Il conçoit les couples de nombres réels

- Et du coup il cherche à construire une extension à des triplets.

- Il fait l’inventaire des propriétés que doivent vérifier les triplets :
- Associativité (il est l’inventeur du mot) et commutativité de l’addition et de la multiplication
- Distributivité de la multiplication sur l’addition, existence d’un quotient
- Une « loi de module ». (le module d’un produit égal le produit des modules)
- Une interprétation dans l’espace à trois dimension.(abandon d’une partie de son idée initiale)

- Recherches vaines
- Il tient finalement, en 1843, la solution avec les quadruplets de nombres réels qu'il nomme quaternions.
- Un quaternion est de la forme :

$w + x\,i + y\,j + z\,k$, où x, y , z et w sont des réels et *i, j, k sont des imaginaires tels que :*

$i^2 = -1 = j^2 = k^2 = ijk$

Alors : $ij = k$; $jk = i$; $ki = j$,

mais $ji = -k$; $kj = -i$; $ik = -j$

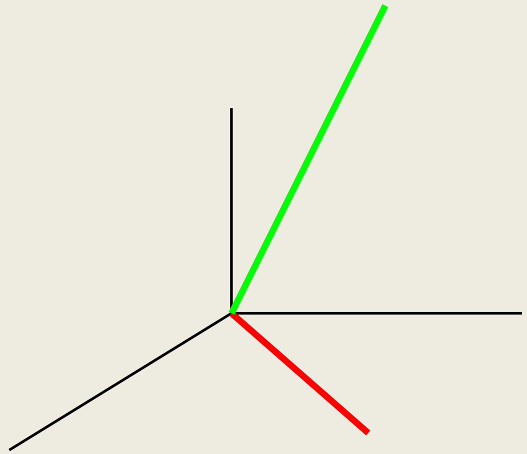
Il a fallu abandonner la commutativité du produit !

Lettre de Hamilton à l’un de ses fils

- *Le 6 octobre, qui se trouvait être un lundi, et jour de conseil de l’Académie Royale d’Irlande, je cheminais pour aller y assister, et ta mère cheminait avec moi le long du canal royal ; et pendant qu’elle me parlait de tout et de rien, mon esprit était pris par une idée rampante, qui finalement donna un résultat, dont il n’est pas exagéré de dire que j’en sentis immédiatement l’importance. Un circuit électrique semblait se former, et un éclair jaillit, le messager (et j’en eu la vision immédiate) de nombreuses et longues années à venir d’un travail et de réflexion dans une direction toute tracée. Aussi, ne pus-je résister à l’impulsion, aussi peu philosophique qu’elle fut, de graver avec un couteau sur une pierre du pont de Brougham, comme nous l’atteignions, la formule fondamentale avec les symboles i, j, k : $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, qui contient la solution du problème.*

Il retracera tout son cheminement de pensée dans la préface de *Lectures on quaternions* (1853). Il expliquera en particulier l'influence de ses travaux en astronomie. Après coup il exposera la « naturalité » de cette découverte, puisque ce sont les couples de nombres réels qui permettent de décrire le plan, ce seront les couples de nombres complexes qui permettront de décrire l'espace.

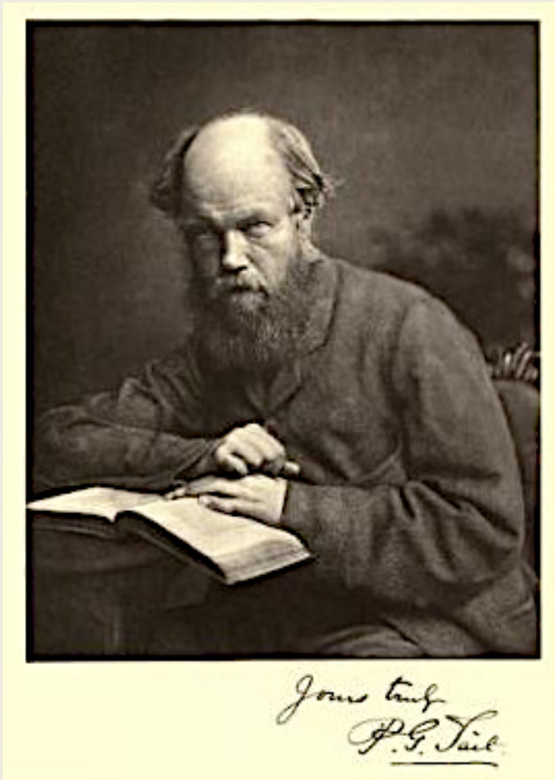
- Par quel « opérateur » peut-on passer dans l’espace d’un « segment orienté » à un autre ?
- Il faut multiplier d’abord la longueur du premier par un réel pour obtenir la longueur du deuxième. Il faut ensuite effectuer une rotation pour passer de la direction « rouge » à la « verte ».



- Pour cela il faut trois éléments numériques qui sont les deux angles déterminant le plan dans lequel s’effectue la rotation, et l’angle déterminant la valeur même de l’angle de la rotation.
- Ce multiplicateur nécessite donc 4 nombres, d’où son nom de quaternion.
- Hamilton a donc abandonné provisoirement son idée de ne pas s’appuyer sur la géométrie pour construire son nouveau système.

- 1843 : « découverte » des quaternions
- 1853 : Lectures on quaternions
- 1866 : publication de Elements of quaternions

- C’est Peter Guthrie Tait qui contribuera à faire connaître les quaternions et les comprendre.



Un quaternion est donc un quadruplet de nombres réels : (a , b , c , d), vu comme le « nombre » : $a + bi + cj + dk$.

i, j, k sont des « imaginaires ».

et la multiplication de deux quaternions est définie par :

$$(a_1+ib_1+jc_1+kd_1)(a_2+ib_2+jc_2+kd_2)=(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)+i(a_1b_2+b_1a_2+c_1d_2-d_1c_2)+j(a_1c_2-b_1d_2+c_1a_2+d_1b_2)+k(a_1d_2+b_1c_2-c_1b_2+d_1a_2).$$

Par analogie avec la partie réelle et la partie imaginaire d'un « nombre complexe », il nomme a, partie scalaire, et $bi + cj + dk$, partie vectorielle, qui deviendront scalaire et vecteur.

Si l'on considère le produit de deux « vecteurs », donc avec $a_1 = a_2 = 0$, on obtient :

$(b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(b_2 i + c_2 j + d_2 k) = -b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 + (c_1 d_2 - d_1 c_2) i + (d_1 b_2 - b_1 d_2) j + (b_1 c_2 - c_1 b_2) k$

La partie scalaire est l'opposé de ce que nous nommons actuellement « produit scalaire », et la partie vectorielle est ce que nous nommons « produit vectoriel ».

Si a et b sont deux quaternions de partie scalaire nulle,
tels que $a = xi + yj + zk$ *et* $b = x'i + y'j + z'k$,
alors $Sab = - xx' - yy' - zz'$
et $Vab = (xy' - yx')k + (zx' - z'x)j + (yz' - y'z)i$

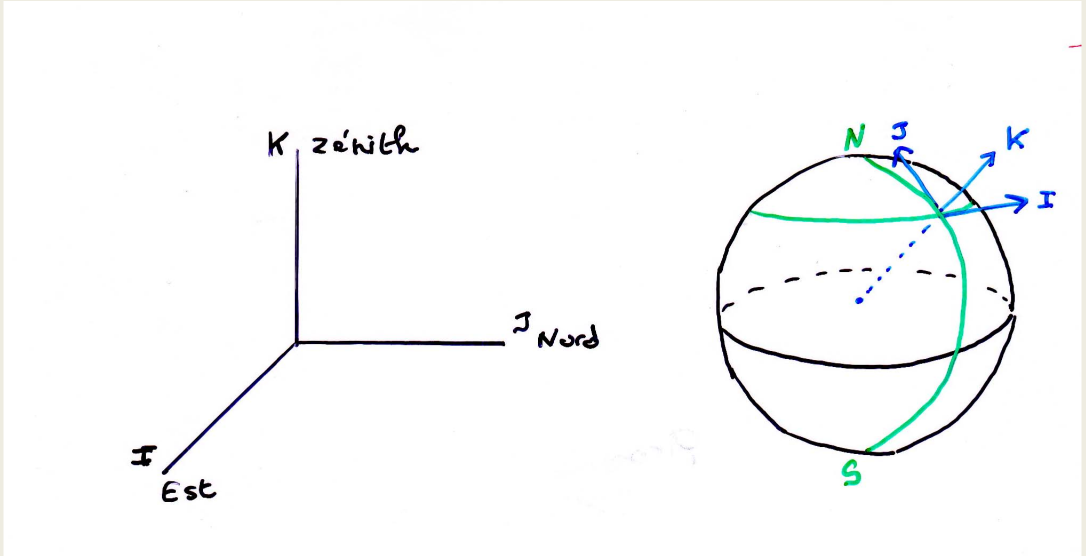
Traité élémentaire des quaternions de P. G. Tait, traduit en français par Gustave Plarr, 1882

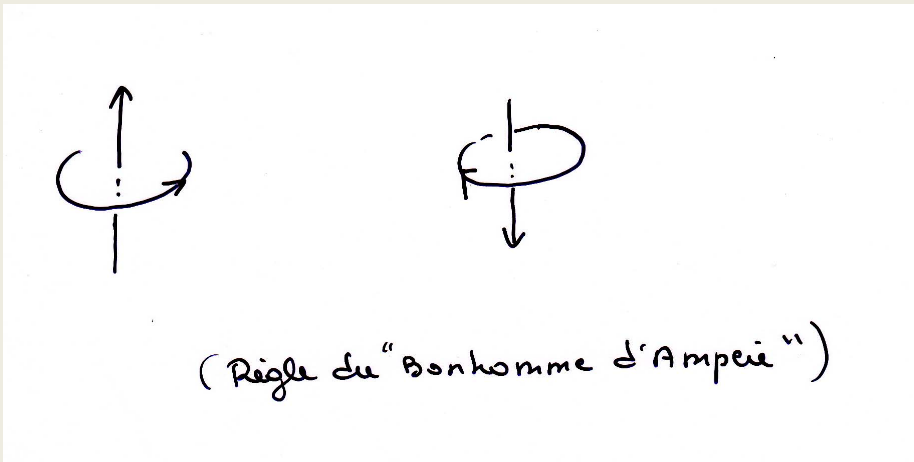
préface

« Dans ce but, Hamilton s'est servi d'une figure pour présenter à l'esprit l'ensemble des valeurs numériques, et il a ainsi conçu l'idée d'une échelle (*scala*), qui s'étendrait en ligne droite depuis les régions de l'infini négatif jusqu'à celles de l'infini positif ; les valeurs numériques seraient en quelque sorte inscrites sur les degrés de l'échelle.

De plus un mobile, qui cheminerait le long de l'échelle et qui servirait d'index, désignerait, à proprement parler, le nombre scalaire, mais nous risquerions ainsi de créer une expression qui serait en dehors du génie de la langue. Nous avons préféré à cet inconvénient l'introduction du terme étranger : *le scalar*. »

« Il me reste à faire quelques observations techniques. Pour déterminer la nature des rotations, j’ai regardé comme positif le sens dans lequel la Terre tourne autour de son axe ou, si l’on veut, le sens dans lequel la Terre se meut autour du Soleil pour un observateur qui est placé dans l’hémisphère septentrional. Le sens de cette rotation est alors l’opposé du mouvement dans lequel tournent les aiguilles d’une montre. »





ELEMENTS OF QUATERNIONS.

BOOK I.

ON VECTORS, CONSIDERED WITHOUT REFERENCE TO ANGLES, OR TO ROTATIONS.

CHAPTER I.

FUNDAMENTAL PRINCIPLES RESPECTING VECTORS.

SECTION 1.—*On the Conception of a Vector; and on Equality of Vectors.*

ART. 1.—A right line AB, considered as having not only *length*, but also *direction*, is said to be a VECTOR. Its initial point A is said to be its *origin;* and its final point B is said to be its *term*. A vector AB is conceived to be (or to construct) the *difference* of its two extreme points; or, more fully, to be the result of the *subtraction* of its own origin from its own term; and, in conformity with this *conception*, it is also denoted by the *symbol* $B - A$: a notation which will be found to be extensively useful, on account of the analogies which it serves to express between geometrical and algebraical operations. When the extreme points A and B are *distinct*, the vector AB or $B - A$ is said to be an *actual* (or an *effective*) vector; but when (as a limit) those two points are conceived to *coincide*, the vector AA or $A - A$, which then results, is said to be *null*. *Opposite* vectors, such as AB and BA, or $B - A$ and $A - B$, are sometimes called vector and *revector*. *Successive* vectors, such as AB and BC, or $B - A$ and $C - B$, are occasionally said to be vector and *provector:* the line AC, or $C - A$, which is

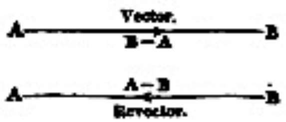


Fig. 1.

drawn from the origin A of the first to the term C of the second, being then said to be the *transvector*. At a later stage, we shall have to consider *vector-arcs* and *vector-angles;* but at present, our only *vectors* are (as above) *right lines*.

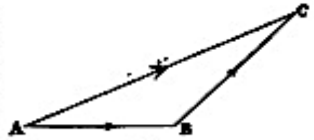


Fig. 2.

2. Two vectors are said to be EQUAL to each other, or the *equation* AB = CD, or $B - A = D - C$, is said to hold good, when (and only when) the origin and term of the one can be brought to *coincide* respectively with the corresponding points of the other, by *transports* (or by *translations*) *without rotation*. It follows that *all null vectors are equal*, and may therefore be denoted by a *common symbol*, such as that used for *zero;* so that we may write,

$$A - A = B - B = \&c. = 0;$$

but that two *actual* vectors, AB and CD, are *not* (in the present *full sense*) *equal* to each other, unless they have not merely *equal lengths*, but also *similar directions*. If then they do not happen to be *parts* of one *common line*, they must be *opposite sides* of a *parallelogram*, ABDC; the two lines AD, BC becoming thus the two *diagonals* of such a figure, and consequently *bisecting* each other, in some point E. Conversely, if the two equations,

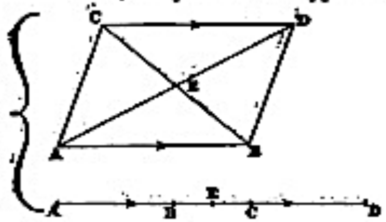


Fig. 3.

$$D - E = E - A, \quad \text{and} \quad C - E = E - B,$$

are satisfied, so that the two lines AD and BC are *commedial*, or have a *common middle point* E, then *even* if they be parts of *one* right line, the equation $D - C = B - A$ is satisfied. *Two radii*, AB, AC, of any *one circle* (or *sphere*), can *never* be *equal vectors;* because their *directions differ*.

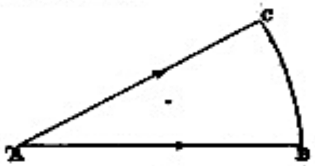


Fig. 4.

« Quoique je ne sois pas encore très avancé dans la nouvelle voie, j'ai fait assez de chemin pour acquérir la certitude qu'avec le temps la Physique mathématique tirera un profit incalculable de la science d'Hamilton. »

Gustave Plarr, 1882

Entre temps …

- La théorie des équipollences de Giusto Bellavitis (1834)

- Giusto Bellavitis (1803-1880)

- Charles Ange Laisant (1841-1920)

Bellavitis se préoccupait de donner du sens aux « quantités imaginaires ». Bellavitis invente une notion qu'il nomme « équipollence », qui donne une vision géométrique à ces imaginaires, sous la forme de « segments orientés », proches de ce que nous nommons « vecteurs du plan ».

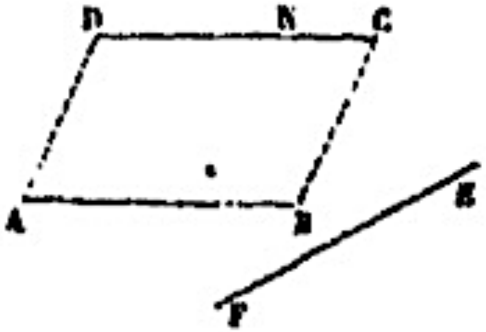
« *On y considère les droites tracées sur un plan dans des directions quelconques ; puis, les représentants par des notations qui impliquent à la fois la grandeur et la direction, et cherchant à exprimer les relations géométriques qui lient entre elles les différentes parties des figures planes, on arrive à établir un calcul (Calcul des Équipollences) dont les règles sont les mêmes que celles du Calcul algébrique ordinaire*. » Charles Ange Laisant, 1874

« *Ce n'est pas que de nombreux travaux n'aient été faits dans la même direction. Mais aucun des auteurs qui ont traité ce sujet n'a présenté la méthode avec autant d'étendue que le savant professeur de Padoue, dont les travaux remontent à l'année 1832; aucun ne l'a exposée sous une forme aussi simple et aussi bien appropriée au sujet*. » Jules Houël, 1869.

.

Pour qu'une droite puisse être substituée à une autre, il ne suffit pas qu'elle lui soit égale (c'est-à-dire d'égale grandeur); mais il faut en outre que ces deux droites soient parallèles et dirigées dans le même sens. Deux droites qui ont de telles relations sont dites *équipollentes;* et, dans le calcul des équipollences, on peut toujours substituer à une droite une autre qui lui soit équipollente. Ainsi la droite AB (*fig.* 1) est équipollente

Fig. 1.



à DC, et est seulement égale à EF; ce qu'on distingue au moyen de deux signes différents, en écrivant

$$AB \; \text{≏} \; DC$$

et

$$AB = EF.$$

- Il introduit la notation *gr.AB* pour désigner la longueur de la « droite » *AB* et *inc.OM* pour indiquer l'inclinaison de la « droite » *OM* par rapport à une droite origine.

- Il énonce aussi : quels que soient les trois points *A, B* et *C*, on a : $AB + BC = AC$

- Et $AC - AB = BC$

- Enfin il définit une multiplication dans le plan, qui revient à la multiplication des nombres complexes :
- gr. (ABxCE) = gr.AB x gr.CE
- Et : inc.(AB x CE) = inc.AB + inc. CE

Hermann Grassmann et *l'Ausdehnungslehre* (Calcul de l'extension)

-
-
- (1809-1877)

Hermann Grassmann, mathématicien autodidacte, publie, en 1844, *Di Lineale Ausdehnungslehre (La science de la grandeur extensive)*, première partie d'une nouvelle branche des mathématiques qui ne serait pas seulement dans le domaine de la géométrie, mais dont la géométrie serait une application.

Aucun succès.

En réponse à un concours lancé en 1846 pour le bicentenaire de Leibniz que le nom de Grassmann réapparait. Il avait obtenu le prix, et Möbius, un des seuls à avoir lu l'*Ausdehnungslehre* avait proposé de l'éditer, pour le faire connaître, sans succès. Le concours s'appuyait sur une lettre de Leibniz publiée seulement en 1833, où celui-ci proposait une sorte de calcul direct sur les formes géométriques, qui serait totalement différent de l'algèbre, et donc de la méthode cartésienne.

Adhémar BARRÉ,
Comte de SAINT-VENANT (1797-1886)

Mémoire sur les sommes et les différences géométriques et sur leur usage pour simplifier la mécanique (1845)

"J'appelle somme géométrique d'un nombre quelconque de lignes a,b,c... données en grandeur, direction et sens, une ligne qui est égale et parallèle au dernier côté d'un polygone dont les autres côtés sont a,b,c... placées bout à bout chacune avec son propre sens. Si l est le dernier côté, j'écris $\overline{l} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$..."

"J'appelle Produit géométrique (d'une ligne b multipliée par une ligne a, et noté $\overline{ab}$) l'aire obtenue, en grandeur et direction, en construisant un parallélogramme sur ces deux lignes menées d'un même point. La face positive est celle sur laquelle a est à gauche et b à droite. Ainsi $\overline{aa} = 0$ et $\overline{ba} = - \overline{ab}$.

J'appelle Produit géométrique d'une aire multipliée par une ligne le volume du parallélépipède (ou prisme oblique) qui a l'aire pour base et dont les côtés sont égaux et parallèles à la ligne donnée. Le volume est considéré comme négatif quand les côtés sont du côté négatif de la base. abc désignera le produit de l'aire $\overline{bc}$ multipliée par la ligne $\overline{a}$."

Lettre de H. Grassmann à De Saint Venant (18 avril 1845)

Comme je lisais l'extrait de votre mémoire sur les sommes et les différences géométriques publié dans les *Comptes rendus* [Tome 21 1845], je fus frappé par la ressemblance merveilleuse, qu'il y a entre les résultats, qui y sont communiqués et les découvertes faites par moi-même depuis l'année 1832 ;[...] J'ai conçu la première idée de la somme et de la différence géométriques de deux ou plusieurs lignes et du produit géométrique de deux ou trois lignes dans l'année nommée, idée en tout égard identique à celle qui est représentée dans l'extrait de votre mémoire.

[...] C'est, aussi, vers 1832 que m'est venue l'idée d'étendre l'emploi des signes algébriques à ces opérations géométriques que l'on est dans le cas de faire en mécanique sur des lignes ou des aires, mais je n'ai rien publié avant 1845.[84]

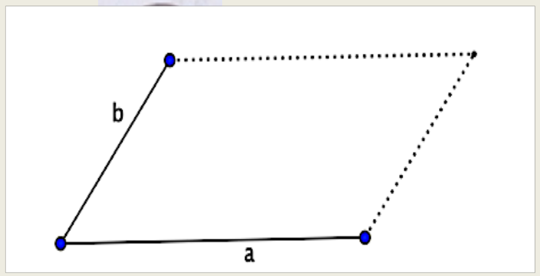
Les idées de la somme et du produit géométriques des lignes ne suffisent pas pour soumettre toute la mécanique au calcul géométrique, et j'ai appliqué dans le traité cité [Theorie der Ebbe und Flut] deux autres idées non moins fécondes, ce sont l'idée du produit linéaire et celle de l'analyse des angles

Dans l’ouvrage la *Théorie des flux et marées* (1839-1840) (publié de façon posthume en 1911) on trouve:

« Par produit géométrique de deux segments orientés nous signifions l’aire du parallélogramme déterminé par ces segments en fixant cependant le plan de ces segments. Nous disons que deux aires planes sont géométriquement égales ***seulement si*** *elles sont égales en grandeurs et situées dans des plans parallèles »*

« Par produit linéal de deux segments (orientés) nous enetendons le produit algébrique de l’un par le projeté orthogonal de l’autre sur lui. Nous choisissons  *comme signe de la multiplication linéale de sorte que par définition :*

A *b = ab cos (ab)*



Wir verstehen nun unter dem *linearen Produkt*[35]) zweier Strecken das algebraische Produkt zwischen der einen und der senkrechten Projektion der anderen auf sie, und wählen als Zeichen der linearen Multiplikation das Zeichen $\overset{\frown}{\cdot}$, so daß also nach der Definition

$$a \overset{\frown}{\cdot} b = ab \cos(ab)$$

ist. Hieraus ergibt sich, da $\cos(ab) = \cos(ba)$ ist,

(g) $$a \overset{\frown}{\cdot} b = b \overset{\frown}{\cdot} a\,, \quad \text{in Worten:}$$

Man kann die Faktoren eines linearen Produktes ohne Änderung der Zeichen vertauschen.

Da ferner die Projektion einer geometrischen Summe auf eine beliebige Linie gleich der Summe von den Projektionen ihrer Stücke ist, so ergibt sich unmittelbar:

(h) $$a \overset{\frown}{\cdot} (b + c) = a \overset{\frown}{\cdot} b + a \overset{\frown}{\cdot} c\,,$$

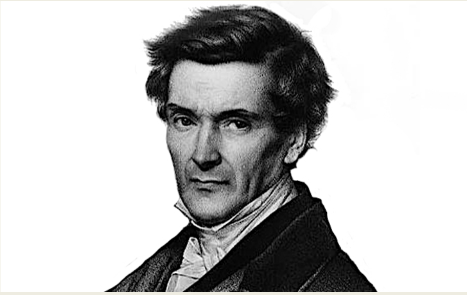
wo das Gleichheitszeichen und das Additionszeichen algebraisch sind. — Weiter folgt:

(i) $$a \overset{\frown}{\cdot} b = 0\,,$$

wenn a auf b senkrecht ist. Denn dann ist $\cos(ab) = 0$, also auch $ab \cos ab$ oder $a \overset{\frown}{\cdot} b = 0$. —

(k) $$a \overset{\frown}{\cdot} b = ab\,,$$

La notion de travail - Autour de Gaspard Gustave Coriolis



G. G. Coriolis
(1792-1843)

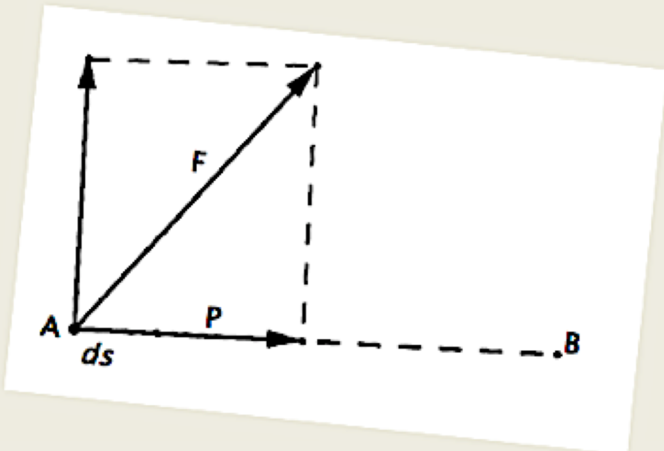
Rôle important dans le développement de la science mécanique; « ingénieur savant »

1819 : *Notes sur la théorie des machines*. Cité par de nombreux collègues. Jamais retrouvées.

1826 : *Observations sur le choix d'une nouvelle dénomination et d'une nouvelle unité pour la dynamique.* Première définition : *le travail est le produit « du chemin parcouru et de la force dans le sens de ce chemin »*

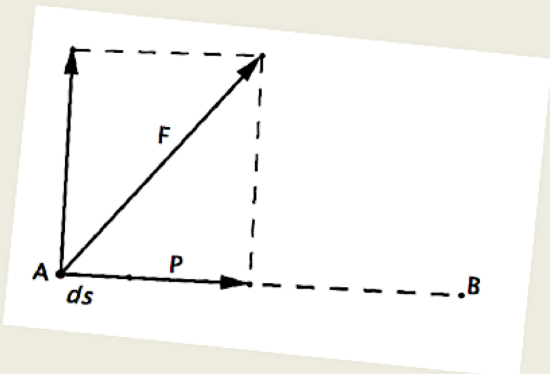
1829 : *Du Calcul de l'effet des machines, ou considérations sur l'emploi des moteurs et sur leurs évaluation, pour servir d'introduction à l'étude spéciale des machines*

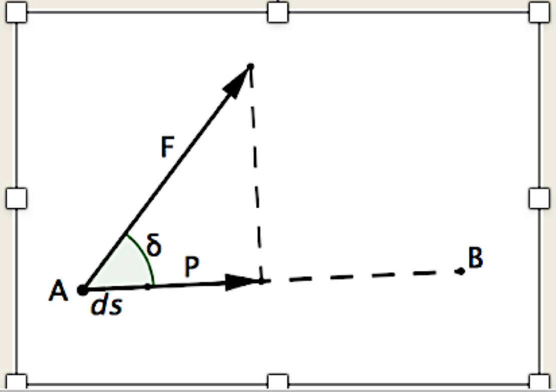
« Concevons que chaque force donnée, appliquée à un certain point du système, soit décomposée en deux, l’une agissant dans le sens de la tangente à la courbe décrite par ce même point, pendant le mouvement, et l’autre dans le sens de la normale ; désignons par P la première composante. *ds* étant le petit arc décrit, que nous prenons pour vitesse virtuelle, il s’ensuivra que le travail élémentaire dû à chacune de ces forces données sera le produit P*ds*. »



Nous proposerons la dénomination de *travail dynamique*, ou plus simplement *travail*, pour la quantité $\int Pds$ définie comme on vient de le dire. Ce nom ne fera aucune confusion avec aucune dénomination mécanique ; il paraît très propre à donner une juste idée de la chose, tout en conservant une acceptation commune dans le sens de travail physique. On attache en effet au mot travail, dans ce sens, l'idée d'un effort exercé et d'un chemin parcouru simultanément : car on ne dirait pas qu'il y a un travail produit, lorsqu'il y a seulement une force appliquée à un point immobile, comme dans une machine en équilibre ; on n'appliquerait pas non plus l'expression de travail à un déplacement opéré sans aucune résistance vaincue. Ce nom est donc très propre à désigne la réunion de ces deux éléments, chemin et force.

Il est bon de remarquer que su F est la force dont P est la composante dans le sens de l'arc décrit *ds*, et si δ est l'angle que fait cette force F avec cet arc *ds*, on aura P = F cosδ, et par suite P*ds* = F cosδ *ds*.





L’influence de Peano

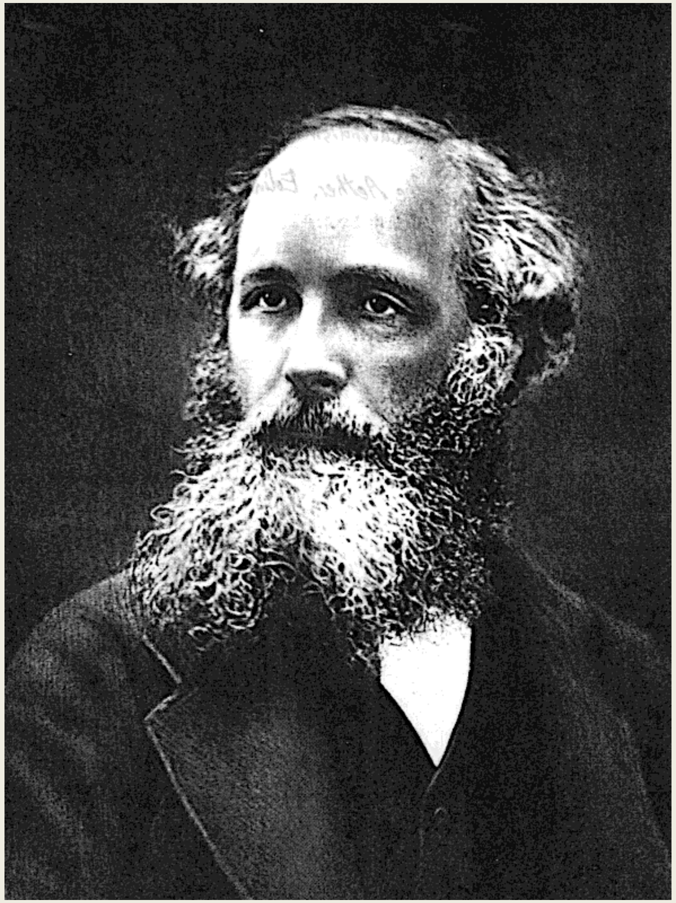
- Giuseppe Peano (1858-1932)

- *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehere 1888.*

- Il reprend l'équipollence de Bellavitis avec comme signe « ≡ » plus pratique.
- Il définit le « produit scalaire » de deux segments :
- $a{\times}b$ = ab cos(angle ab)
- Il définit l'aire algébrique d'une figure et pose :
- ABC ≡ - ACB pour exprimer que les triangles n'ont pas le même sens mais que les aires sont les mêmes.
- Alors il définit une nouvelle opération sur les segments :
- On désigne par a.b l'aire du parallélogramme OACB dans lequel OA ≡ a et OB ≡ b, dont le périmètre est parcouru dans le sens OA ≡ a.
- Alors a.b ≡ - b.a

- Enfin dans le chapitre « transformation des systèmes linéaires », il énonce des axiomes qui définissent presque ce que nous nommons la structure d'espace vectoriel…. Qui peuvent être de dimension 1, 2, 3 ou …n.

- **La contribution de Maxwell**



James Clark Maxwell (1831-1879)

James Clerk Maxwell, Treatrise on Electricity and Magnetism (1873)

« Mais en de nombreuses occasions du raisonnement physique, considéré comme distinct du calcul, il est souhaitable d'éviter l'introduction explicite des coordonnées cartésiennes, et de fixer immédiatement l'attention sur un point de l'espace plutôt que sur ses trois coordonnées, et sur la grandeur et la direction d'une force au lieu de ses trois composantes. Cette façon de voir les quantités géométriques et physiques est plus primitive et plus naturelle que l'autre, bien que les idées qui s'y rattachent ne reçurent leur plein développement que lorsque Hamilton, par l'invention de son calcul des quaternions, fit avancer d'un grand pas le traitement de l'espace.

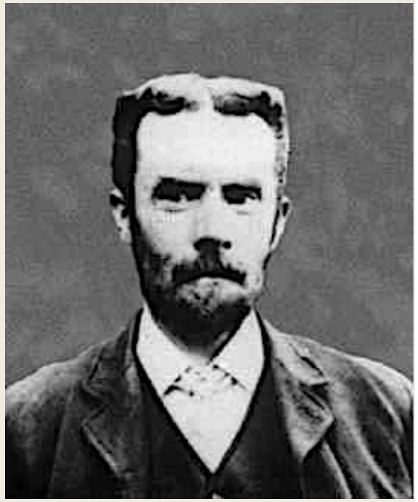
Comme les méthodes de Descartes sont encore les plus familières aux étudiants scientifiques, et puisqu'elles sont réellement les plus utiles en matière de calcul, nous exprimerons tous nos résultats dans la forme cartésienne. Je suis convaincu cependant, que l'introduction de ces idées, telles qu'on les distingue à partir des opérations et des méthodes des quaternions, nous sera d'un grand secours dans l'étude de toutes les parties de notre sujet, et plus spécialement en électro-dynamique, où nous devons traiter de nombreuses quantités physiques, dont les relations mutuelles trouvent une expression beaucoup plus simple par quelques expressions de type Hamilton que par les équations ordinaires.

L'un des aspects les plus importants de la méthode de Hamilton est la division des quantités entre scalaires et vecteurs ».

Le seul fait expérimental dont nous ayons fait usage dans cette investigation est le fait établi par Ampère, que l'action d'un circuit fermé sur toute portion d'un autre circuit est perpendiculaire à la direction de ce dernier. Le reste des recherches dépend de considérations purement mathématiques, dépendant elle-mêmes des propriétés des lignes dans l'espace. Le raisonnement peut alors se présenter sous une forme beaucoup plus condensée et appropriée, utilisant les idées et le langage de la méthode mathématique spécialement adaptée à l'expression de telles relations géometriques – les *Quaternions* de Hamilton.

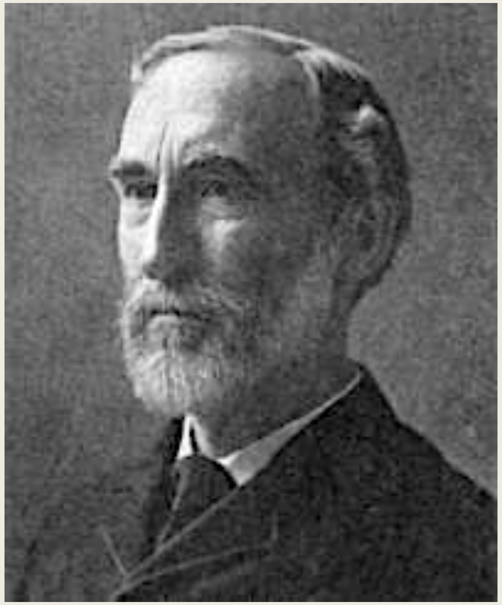
- « Tels furent les commencements de l'étude de la représentation géométrique des imaginaires qui dans les temps modernes nous a conduits à de si grands corps de doctrines, comme la théorie des fonctions d'un côté, celle des quaternions de l'autre avec l'Ausdehnungslehere qui occupe une position entre les deux. Qui pourrait dire les progrès que lui fera faire le prochain siècle ? »
    - W. Beman, l'Enseignement mathématique, 1899.

Et …

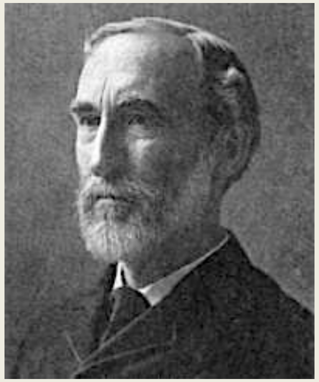


Oliver Heaviside (1850-1925)

Willard Gibbs (1839-1903)



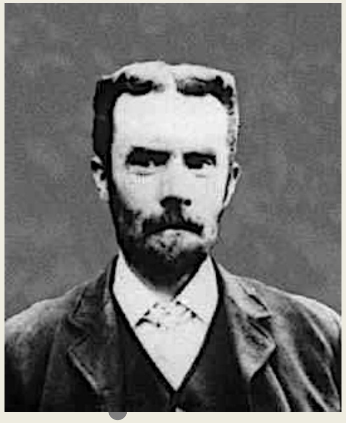
Cesare Burali Forti (1861-1931)



W. Gibbs : premier docteur ingénieur des USA en 1863 Enseigne à Yale le latin et la philosophie naturelle.

Première publication en 1873 : sur la thermodynamique.

Passe 3 ans en Europe. Très influencé par Maxwell ; étudie l'analyse vectorielle. Utilise essentiellement les idées de Grassmann plus applicables à la physique que celles de Hamilton.(Avant que le travail de Grassmann ne soit connu, les quaternions étaient le seul moyen de travailler avec les vecteurs de l'espace).



On lui doit, avec Heaviside les notations vectorielles modernes de l'analyse vectorielle (par exemple le point pour le produit scalaire, qui deviendra le « dot product »).

Gibbs écrit entre 1881 et 1884 *Elements of vector analysis,* qui circulera pendant 20 ans sans être publié.
Un de ses élèves, le publiera en 1901.il sera repris et modernisé en 1921 par C. E. Weatherburn, à Melbourne.

Addition and Subtraction of Vectors.

4. The manner in which the vector quantities of mechanics and physics are compounded is expressed by the **triangle law of addition**, which may be stated as follows :

If three points O, P, R are chosen so that $\vec{OP}=\mathbf{a}$ and $\vec{PR}=\mathbf{b}$, then the vector $\vec{OR}$ is called the (vector) sum or resultant of **a** *and* **b**.

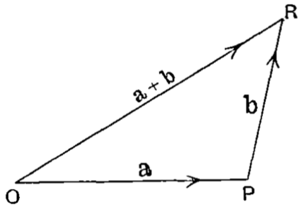


FIG. 2.

Denoting this resultant by **c**, we write

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b},$$

borrowing the sign + from algebra, and using the term *vector addition* for the process by which the resultant **c** is obtained from the *components* **a** and **b**. The above definition is not an arbitrary mathematical assumption. It is an expression of the way in which the vector quantities of physics and mechanics are compounded. We see also that the sum of two vectors $\mathbf{a}=\vec{OP}$ and $\mathbf{b}=\vec{OQ}$ is the vector $\vec{OR}$ determined by the diagonal of the parallelogram of which OP and OQ are sides. For $\vec{PR}=\vec{OQ}=\mathbf{b}$, so that

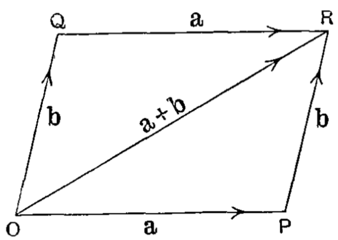


FIG. 3.

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\vec{OP}+\vec{PR}=\vec{OR}.$$

Thus the triangle law of addition is identical with the parallelogram law involved in the so-called "parallelogram of forces."

Further, since $\vec{QR}=\vec{OP}=\mathbf{a}$ it follows that

$$\mathbf{b}+\mathbf{a}=\vec{OQ}+\vec{QR}=\vec{OR},$$

showing that $\mathbf{b}+\mathbf{a}=\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{r}$ (say).

Application to Mechanics.

39. Work done by a force. A force acting on a particle does work when the particle is displaced in a direction which is not perpendicular to the force. The work done is a scalar quantity jointly proportional to the force and the resolved part of the displacement in the direction of the force. We choose the unit quantity of work as that done when a particle, acted on by unit force, is displaced unit distance in the direction of the force. Hence, if **F**, **d** are vectors representing the force and the displacement respectively, inclined at an angle θ, the measure of the work done is

$$Fd\cos\theta=\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}.$$

The work done is zero only when **d** is perpendicular to **F**.

Suppose next that the particle is acted on by several forces $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$. Then during a displacement **d** of the particle the separate forces do quantities of work $\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{d}, \mathbf{F}_2\cdot\mathbf{d}, \ldots, \mathbf{F}_n\cdot\mathbf{d}$. The total work done is

$$\sum_1^n \mathbf{F}\cdot\mathbf{d}=\mathbf{d}\cdot\Sigma\mathbf{F}=\mathbf{d}\cdot\mathbf{R},$$

and is therefore the same as if the system of forces were replaced by its resultant **R**.

Note. *A force represented by the vector* **F** *may be conveniently referred to as a force* **F**. *No misunderstanding is possible, for our Clarendon symbols always denote length-vectors. Similarly we may speak of a displacement* **d**, *or a velocity* **v**, *as we have already done of a point* **r**.

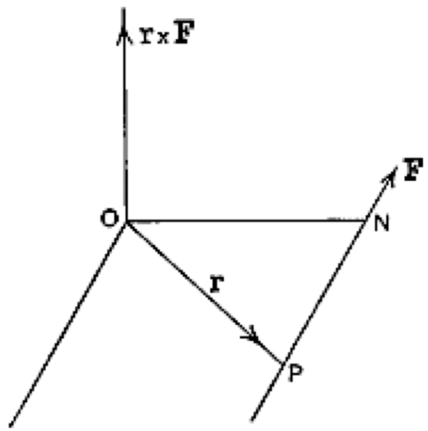


FIG. 38.

40. Vector moment or torque of a force. The vector moment (or briefly the moment) of a force **F** about a point O is a vector quantity related to an axis through O perpendicular to the plane containing O and the line of action of the force. Its magnitude is jointly proportional to the force and the perpendicular distance ON upon its line of action. The moment or *torque*

Cesare Burali Forti est un élève de Peano. Avec Roberto Marcolongo, ils écrivent en 1909 leurs *Eléments de calcul vectoriel* qui seront traduit en français en 1910. Cet ouvrage contribuera fortement à faire connaître les idées vectorielles en France.

A la suite des travaux de Hamilton et Grassmann, et après une rivalité entre « quaternionistes » et « partisans des vecteurs », un certain nombre de « physico mathématiciens » (Maxwell, Gibbs, Heaviside ..) mettent au point, à partir de 1880, les outils principaux de ce qu'on appelle le calcul vectoriel dans l'espace à trois dimensions : produit scalaire, produit vectoriel, produit mixte, opérateur différentiel, …

En mathématiques, jusqu'en 1930, avec la naissance de l'algèbre linéaire, c'est le point de vue des matrices et des coordonnées qui prédomine.

Quelques notations et dénominations pour le produit scalaire

TABLE OF NOTATIONS *

	Vector.	Scalar product.	Vector product.	Dyad.	Gradient.	Divergence.	Curl.
Gibbs, Wilson	$\mathbf{a}$	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$	$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$	$\mathbf{ab}$	∇	$\nabla\cdot = \mathrm{div}$	$\mathrm{curl} = \nabla\times$
Heaviside -	$\mathbf{a}$	$\mathbf{ab}$	$V\mathbf{ab}$	$\mathbf{a}.\mathbf{b}$	∇	div	curl
Abraham	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$	$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$		∇	div	curl
Ignatowsky	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$	$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$	$\mathfrak{A};\mathfrak{B}$	∇	div	rot
Lorentz	$\mathbf{A}$	$(\mathbf{A}.\mathbf{B})$	$[\mathbf{A}.\mathbf{B}]$		grad	div	rot
Burali Forti and Marcolongo	$\mathbf{a}$	$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$	$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$		grad	div	rot

Burali Forti et Marco longo: produit intérieur ; Gibb's : direct product ;
Grassmann : produit lineal ; Hamilton : scalar
Clifford : scalar product

Enseigner les vecteurs. Quels vecteurs ?

La notion de vecteur a du mal à s'imposer dans le milieu des mathématiciens français. Voici ce qu'en dit par exemple Raoul Bricard en 1929 :

« *Le calcul vectoriel a mis assez longtemps à pénétrer en France, et l'on ne peut dire encore qu'il y soit couramment pratiqué. Il gagne pourtant rapidement du terrain, surtout parmi les physiciens, M. G. Bruhat, par exemple, en fait largement usage dans son beau Cours d'électricité. C'est aussi un instrument de choix en géométrie infinitésimale, en Mécanique rationnelle, en Hydrodynamique, dans la Théorie de l'élasticité. Avant deux ou trois lustres, sans doute, il ne sera permis à aucun mathématicien d'en ignorer l'emploi.* »

Bricard, Raoul, *Le calcul vectoriel*, Armand Colin, Paris, 1929

Charles Ange Laisant (1841-1920)

L'enseignement mathématique, 1912

« Qu’est-ce qu’un vecteur ?

Le calcul des vecteurs offre de grandes ressources. Dans les applications géométriques ou mécaniques notamment, il permet d'obtenir d'importantes simplifications et une plus grande clarté. Non seulement les écritures sont sensiblement abrégées, mais l'instrument analytique qu'on emploie représente d'une façon directe les choses auxquelles il s'applique, et que l'usage des coordonnées fait trop souvent perdre de vue.

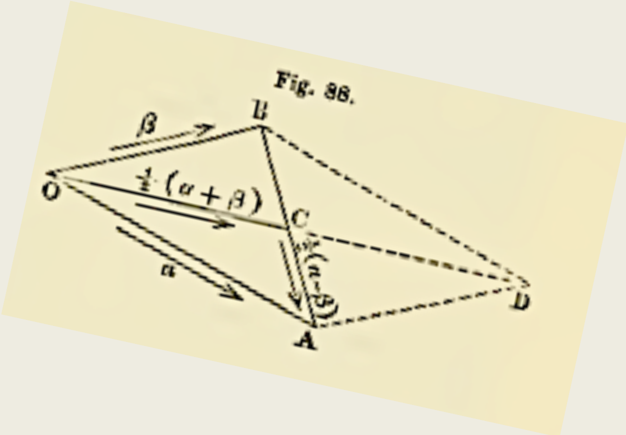
Depuis de longues années, en Grande Bretagne surtout, l'emploi des vecteurs a permis d'en constater tous les avantages, et de grands efforts ont été faits pour les mettre en lumière. En France, non sans peine, le *mot* « vecteur » a fini par prendre droit de cité dans l'enseignement. Il figure dans une foule de programmes, et aussi dans la plupart des livres classiques contemporains.

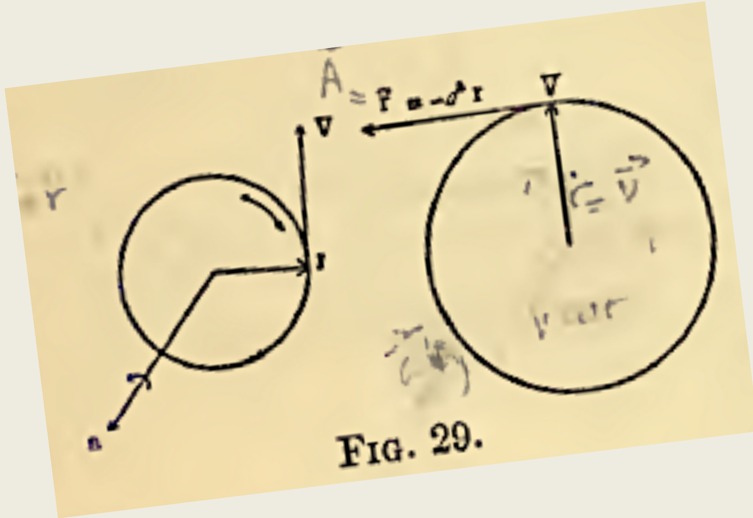
Je dis le *mot,* avec intention, car il n'en est pas de même de la chose. Du mot, on use et je pourrais dire on abuse. La chose reste dans une sorte de pénombre mystérieuse. Fait pour ainsi dire incroyable, on ne trouve à peu près nulle part une définition précise d'un vecteur, même dans d'excellents ouvrages, ou dans les cours des plus éminents professeurs ; et je n'ai jamais rencontré un seul candidat capable de répondre à cette question : « Qu'appelez-vous un vecteur? », alors que depuis un quart d'heure au moins, il m'exposait une foule de considérations sur les vecteurs et se livrait à des développements de calcul assez étendus à ce sujet. Jamais non plus je n'en ai tenu rigueur aux candidats ; ce n'est pas en effet leur faute, mais bien celle d'une mauvaise tradition, contre laquelle il serait utile de réagir. ***Le manque de précision est toujours funeste en matière d’enseignement.*** **»**

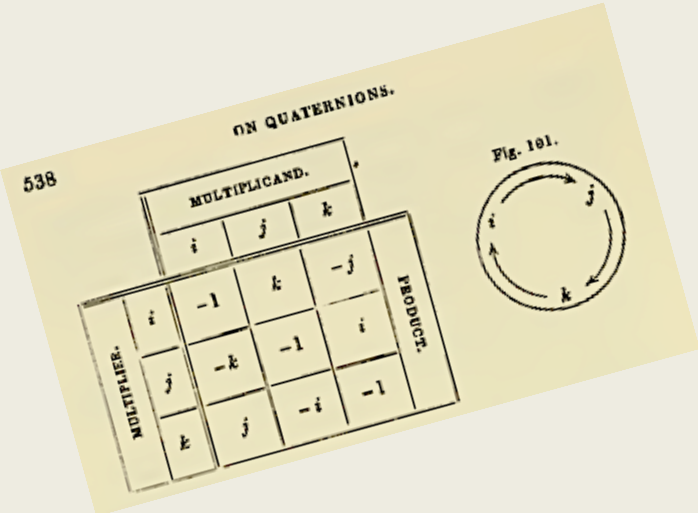
« La statique élémentaire va me permettre d'indiquer plus nettement la confusion que je constate et que je critique, car c'est peut-être que les résultats ont été les plus funestes. On y définissait jadis une *force*, appliquée en un point A, par un *segment* AB, dont la longueur AB mesurait l'intensité de la force ; la demi-droite indéfinie AB indiquait la direction et le sens de la force; on l'appelait sa *ligne d'action*; et on admettait comme postulat qu'une force peut être transportée où l'on voudra le long de sa ligne d'action.

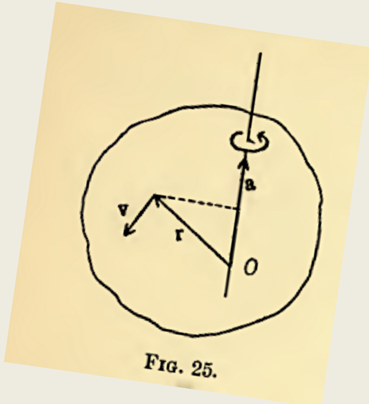
Cette terminologie a été critiquée, parce qu'on ne peut pas établir a priori l'identité entre les forces en question et les forces de la dynamique. On a fait remarquer avec raison que la statique élémentaire n'est au fond qu'une géométrie particulière, préparatoire à la mécanique ; mais c'est à tort qu'on a cru sortir de peine et tourner la difficulté en remplaçant le mot *force* par le mot *vecteur* ; et le tort est d'autant plus grand qu'on l'a fait sans le dire. On a surtout appelé *vecteur* ce qui n'est pas un vecteur, ni dans le langage des inventeurs, ni dans celui des géomètres qui ont fait usage de ce nouveau mode de calcul géométrique. »

La présence des vecteurs dans l'enseignement secondaire a suivi un peu cette lente reconnaissance. Au début du 20ème siècle, le concept de vecteur est encore en cours de constitution et ils sont présents dans le cours de mécanique et de cinématique, pour les classes scientifiques. Ce sont alors plutôt des « **segments orientés** ». Pendant longtemps persiste un certain flottement sur la définition du vecteur entre son **usage en mécanique** (où la notion de force nécessite un point origine), **en cinématique**, où la notion de vecteur vitesse ou vecteur accélération apparaîtra, …Les notions de vecteurs liés, vecteurs libres, vecteurs équipollents répondront en partie à cette demande de précision, dont Laisant nous l'avons vu affirmait qu'il est funeste en matière d'enseignement.









Merci de votre attention